

GRAVITACIJSKO LEČENJE IN MASE ČRNIH LUKENJ

Seminar

Avtor: Uroš Kostić
Mentor: prof.dr. Andrej Čadež

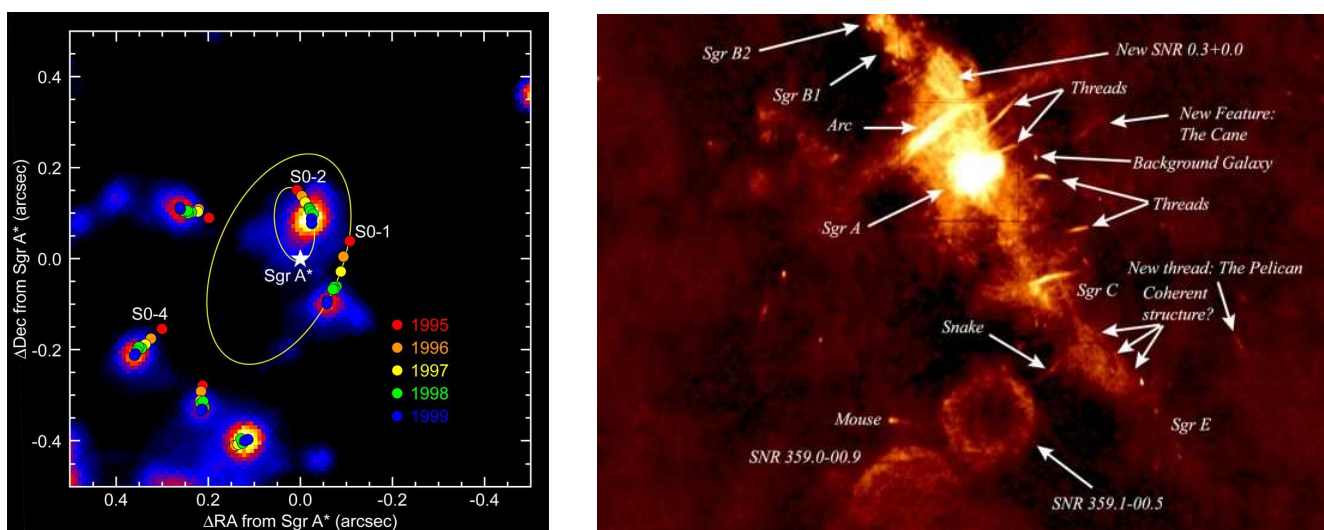
13. februar 2005

Povzetek

V zadnjih letih se se pojavili dokazi, da precej bližnjih galaksij vsebuje supermasivno črno luknjo v svojem središču. Z zasledovanjem gibanja zvezd v središču naše Galaksije so ugotovili, da jo vsebuje tudi ta. Ker je v središču precejšnja gostota zvezd, se lahko zgodi, da katera pade v črno luknjo. Če je zvezda približno enako velika kot črna luknja, lahko pride do plimskega raztrganja zvezde, če pa je zvezda precej manjša, pade v črno luknjo nespremenjena. V obeh primerih igrajo pomembno vlogo relativistični pojavi zaradi močnega gravitacijskega polja v bližini črne luknje. V seminarju bom predstavil padec majhne, goste zvezde v črno luknjo, pri čemer bom posebej poudaril vplive močnega gravitacijskega polja okrog črne luknje na gibanje svetlobe od zvezde do opazovalca. Zvezdo bom tako modeliral kot majhno togo kroglico. S takim modelom bi lahko približno opisal padec kometa, planeta, bele pritlikavke ali nevtronske zvezde v galaktično črno luknjo.

1 Uvod

V zadnjih letih je bilo ugotovljeno iz meritev radialnih hitrosti kroženja snovi v galaksijah in virialnega teorema, da precej bližnjih galaksij v svojem središču vsebuje supermasivno črno luknjo – npr. nam najbližja Andromedina galaksija M31, njena spremljevalka M32, NGC 3115 in NGC 4594 [1]. Leta 2000 so bili objavljeni rezultati desetletnih opazovanj središča naše galaksije v infrardeči svetlobi [2, 3]. Snemali so položaje posameznih zvezd v okolici središča galaksije in iz njihovega gibanja (slika 1, levo) ugotovili, da se v središču nahaja objekt z maso $\approx 2.6 \cdot 10^6$ sončnih mas. Ker mora biti ta zelo masiven objekt precej manjši od najmanjše razdalje zvezde SO-2 od središča Galaksije (t.j. 17 svetlobnih ur [4]), je edina možnost, da je masivni objekt črna luknja.

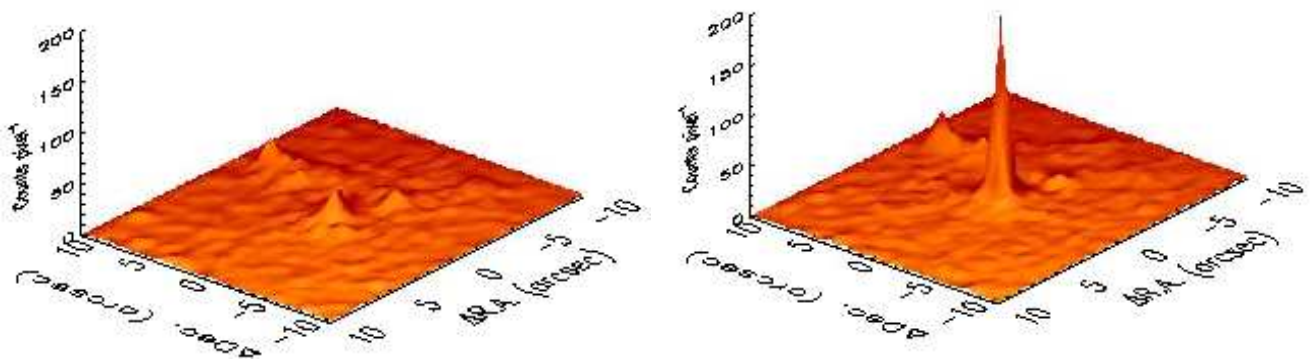


Slika 1: Levo: Prikaz gibanja zvezd v bližini središča naše galaksije med leti 1995 – 1999. Desno: Fotografija središča naše galaksije ($4'' \times 4''$) posneta v radijski svetlobi z valovno dolžino 1 meter [5].

Natanko v središču Galaksije, kjer je črna luknja, je že dolgo znani izvor radijskega sevanja Sgr A* (slika 1, desno) in zelo svetel izvor rentgenskega sevanja [6]. Danes predvidevamo, da je vzrok za tako močno rentgensko sevanje zelo visoka temperatura, ki jo ima okoliška snov zaradi gibanja okoli črne luknje. Leta 2001 so poročali tudi o močnih in kratkih bliskih rentgenske svetlobe iz smeri Sgr A* (slika 2) [7], do katerih naj bi prišlo, ko črna luknja plimsko deformira in opravi delo na telesu, ki se ji preveč približa [8, 9]. Vpliv plime je najmočnejši, če sta črna luknja in telo, ki pada proti luknji, približno enake velikosti, kar pomeni, da ima črna luknja v središču naše galaksije najmočnejši vpliv na zvezde, ki so velike približno toliko kot naše Sonce. Če se taka zvezda zadosti približa črni luknji, jo črna luknja raztrga, pri čemer se pokaže njena notranjost [8]. Ker so temperature v notranjosti takih zvezd $\approx 10^7 K$ in se pri plimski deformaciji še segrejejo, vidimo padec zvezde kot močan blisk rentgenske svetlobe.

Kakšen je izid srečanja med črno luknjo z maso m_{BH} in zvezdo z maso M_* in polmerom R_* je odvisno predvsem od razmerja $\beta = r_R/r_p$, kjer je Rochev radij r_R :

$$r_R = \left(\frac{m_{BH}}{M_*} \right)^{\frac{1}{3}} R_* , \quad (1)$$



Slika 2: Prikaz polja v velikosti $20'' \times 20''$ s središčem v Sgr A* pri energiji 2–8 keV ob različnih obdobjih. Sliki sta bili posneti 21. septembra 1999 (levo) in 26-27 oktobra 2000 s satelitom *Chandra*. [7]

periastron r_p pa najmanjša razdalja, do katere se zvezda približa črni luknji. Glede na razmerje velikosti črne luknje in zvezde lahko ločimo 5 različnih tipov plimskih interakcij, pri katerih se zvezda približa črni luknji vsaj toliko, da jo “oplazi” [10]:

- $m_{BH}/M_* \ll 1$: Rochev radij je dosti manjši od polmera zvezde. V tem primeru črna luknja nima velikega vpliva na zvezdo, niti če gre skozi njo in pri tem pobere nekaj snovi.
- $m_{BH}/M_* \sim 1$: Rochev radij je približno enak polmeru zvezde, je pa velikost črne luknje še vedno precej manjša od velikosti zvezde ($R_* \gg 2Gm_{BH}/c^2$). Energija plime je približno $10^{-5} M_* c^2$, kar je ravno zadosti, da se cela zvezda deformira – interakcija lahko sproži celo supernovo. Spremembe v strukturi zvezde so določene s hidrodinamskimi procesi, zato tak dogodek ne direktno odraža relativističnih pojavov značilnih za močno gravitacijsko polje v bližini črne luknje.
- $m_{BH}/M_* \sim (c/v_e)^2$, kjer je v_e ubežna hitrost z zvezde: Rochev radij je precej večji od polmera zvezde, velikost črne luknje pa je primerljiva s polmerom zvezde. Energija plime preseže notranjo energijo za več velikostnih razredov, zaradi česar je zvezda plimsko popolnoma raztrgana. To se zgodi blizu črne luknje, zato za ta pojav postanejo pomembni relativistični efekti v močnem gravitacijskem polju.
- $(c/v_e)^2 < m_{BH}/M_* < (c/v_e)^3$: Črna luknja je večja od zvezde, Rochev radij pa je še vedno izven črne luknje. Energija plime je še vedno primerljiva z notranjo energijo in lahko povzroči visokoenergijske udarne valove, ki nekajkrat povečajo izsev zvezde, vseeno pa zvezda ostane majhna v primerjavi s črno luknjo. Tak dogodek zelo dobro odraža relativistične pojave značilne za močno gravitacijsko polje.
- $m_{BH}/M_* > (c/v_e)^3$: Črna luknja je dosti večja od zvezde, Rochev radij pa leži *znotraj* črne luknje, kar pomeni, da je zvezda plimsko raztrgana šele v črni luknji in tega pojava ne moremo videti. Poleg tega se zvezda zunaj horizonta ne deformira in ne segreje, zato je manj možnosti, da bi tak pojav lahko videli.

Za študij pojavov značilnih za splošno relativnost so primerni zadnji trije primeri; ker se v zadnjih dveh primerih struktura zvezde bistveno ne spremeni, sta še posebej primerna za študij vpliva močnega gravitacijskega polja na svetlobo in s tem na svetlobno krivuljo takih dogodkov. Poleg gravitacijskega lečenja, aberacije in gravitacijskega rdečega premika je pri določanju svetlobne krivulje pomemben tudi Dopplerjev pojav, ker doseže zvezda blizu črne luknje zelo visoke hitrosti. Zaradi teh pojavov se lahko, ob ugodnih legah opazovalca glede na orbito zvezde, svetloba ojači več desetkrat [7, 11, 8].

V seminarju bom predstavil, kako bi videli padec toge kroglice v črno luknjo. V primeru črne luknje v središču naše Galaksije takemu padcu ustreza padec kometa, planeta, nevtronske zvezde in bele pritlikavke. Z metodo sledenja žarkov, ob upoštevanju vseh relativističnih pojavov, konstruiram sliko, kakršno bi videl oddaljen opazovalec. Pri tem modelu je naravna časovna skala masa črne luknje, kar daje možnost, da iz meritev časovnega poteka bliskov določimo to maso.

2 Padec majhne kroglice v črno luknjo

Središče kroglice naj bo v točki $\mathcal{P}_c = (t_c, r_c, \theta_c, \varphi_c)$, na površju kroglice so točke $\mathcal{P}_i = (t_i, r_i, \theta_i, \varphi_i)$, vektor \vec{r}_i pa kaže iz središča v točko \mathcal{P}_i na površju kroglice. Ker je prostor v okolici črne luknje precej ukrivljen, je potrebno nekaj previdnosti pri definiciji vektorja \vec{r}_i ; v ukrivljenem prostoru obstajajo le vektorji, ki so tangenti na prostor v neki točki in krivulje, ki povezujejo dve točki. Zaradi tega ne moremo določiti vektorja \vec{r}_i preprosto z nekakšnim odštevanjem krajevnih vektorjev točk \mathcal{P}_c in \mathcal{P}_i , kot to počnemo v ravnem prostoru. To lahko storimo le, če je prostor lokalno "zadosti" raven. Ukrivljenost prostora je približno enaka $1/R_{Sch}$, kjer je R_{Sch} polovični polmer črne luknje. Torej, če je kroglica manjša od te vrednosti, lahko rečemo, da je vektor \vec{r}_i vektor, ki povezuje točki \mathcal{P}_c in \mathcal{P}_i in pri tem ne naredimo prevelike napake.

2.1 Gibanje kroglice

Glede na središče kroglice izberemo v začetni točki četverico baznih vektorjev \vec{e}'_μ , ki mirujejo glede na črno luknjo in določajo koordinatni sistem S' (slika 3). Za tako izbrane bazne vektorje \vec{e}'_μ velja:

$$\vec{e}'_\mu \cdot \vec{e}'_\nu = g_{\mu\nu} , \quad (2)$$

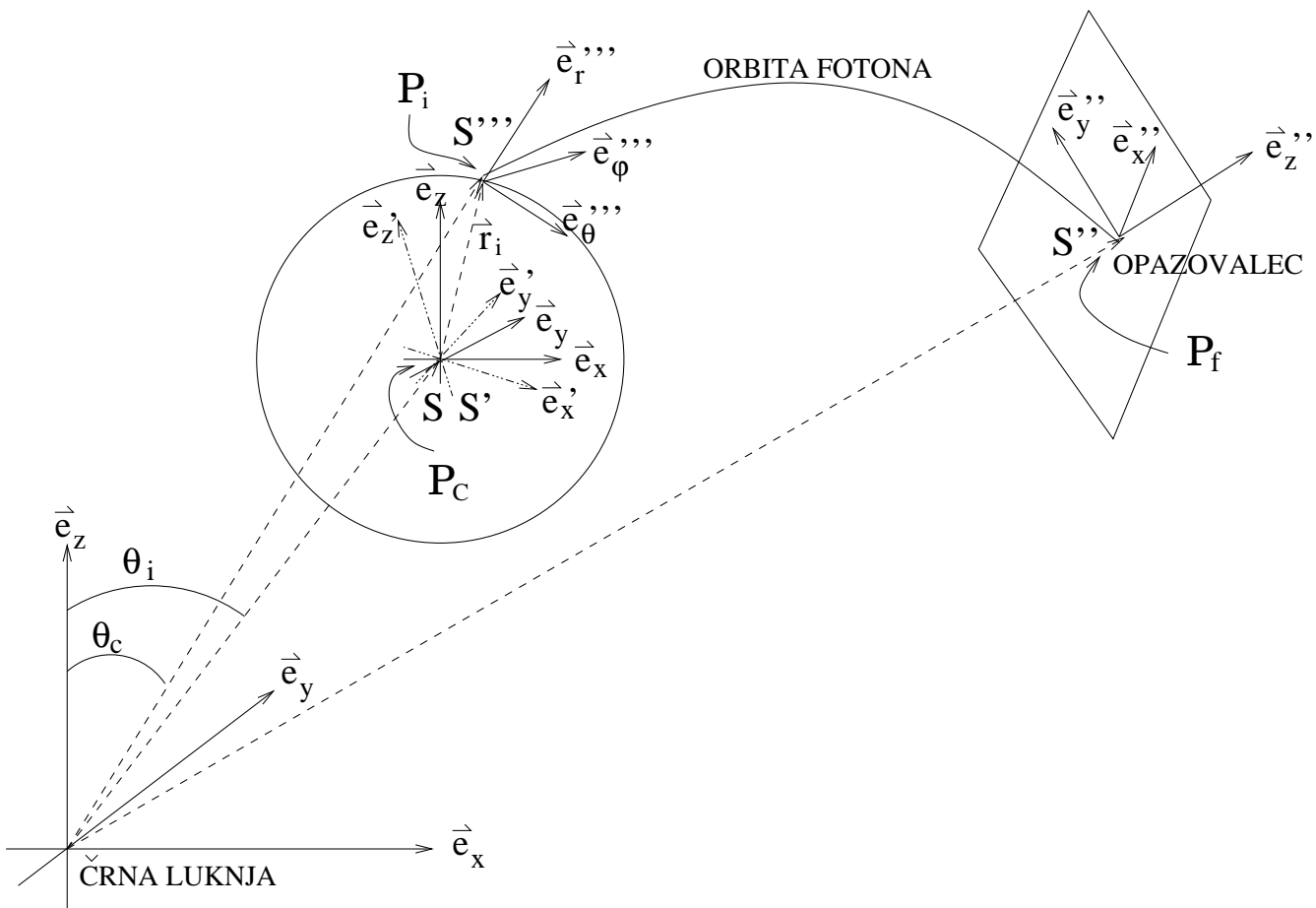
kjer so $g_{\mu\nu}$ elementi tenzorja, ki določa metriko Schwarzschildskega prostora. V izhodiščni točki nadalje izberemo četverico lokalnih ortonormiranih baznih vektorjev¹ \hat{e}'_μ :

$$\hat{e}'_\mu = \frac{\vec{e}'_\mu}{\sqrt{|g_{\mu\mu}|}} \quad (3)$$

tako, da velja:

$$\hat{e}'_\mu \cdot \hat{e}'_\nu = \eta_{\mu\nu} , \quad (4)$$

¹Taka izbira je možna, ker velja $g_{\mu\nu} = 0$, če $\mu \neq \nu$.



Slika 3: Koordinatni sistemi uporabljeni pri modeliranju padca majhne kroglice v črno luknjo: sistemi S' , S'' in S''' mirujejo glede na črno luknjo, sistem S pa se giblje skupaj s kroglico.

kjer so $\eta_{\mu\nu}$ elementi matrike Minkowskega. Poleg tega izberemo v začetni točki četverico ortonormiranih vektorjev $\hat{\varepsilon}_\mu$, ki se skupaj s kroglico gibljejo in določajo koordinatni sistem S . V tem sistemu zapišemo vektor \vec{r}_i za vsako točko \mathcal{P}_i na površju kroglice:

$$\vec{r}_i = T_i \hat{\varepsilon}_t + R_i \hat{\varepsilon}_r + \Theta_i \hat{\varepsilon}_\theta + \Phi_i \hat{\varepsilon}_\varphi \quad (5)$$

tako, da je kroglica v gibajočem sistemu S okrogla. Kakšna je videti za mirujočega opazovalca v sistemu S' , pa določa Lorenzova transformacija:

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta_x & \gamma\beta_y & \gamma\beta_z \\ \gamma\beta_x & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta_x\beta_x & \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta_x\beta_y & \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta_x\beta_z \\ \gamma\beta_y & \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta_x\beta_y & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta_y\beta_y & \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta_y\beta_z \\ \gamma\beta_z & \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta_x\beta_z & \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta_y\beta_z & 1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta_z\beta_z \end{pmatrix}, \quad (6)$$

kjer je $\vec{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)$ hitrost kroglice v sistemu S' in $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Torej se vektor \vec{r}_i v sistemu S' zapiše:

$$\vec{r}_i = T'_i \hat{\varepsilon}'_t + R'_i \hat{\varepsilon}'_r + \Theta'_i \hat{\varepsilon}'_\theta + \Phi'_i \hat{\varepsilon}'_\varphi, \quad (7)$$

kjer dobimo komponente T'_i , R'_i , Θ'_i in Φ'_i iz $T_i (= 0)$, R_i , Θ_i in Φ_i :

$$\begin{pmatrix} T'_i \\ R'_i \\ \Theta'_i \\ \Phi'_i \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} 0 \\ R_i \\ \Theta_i \\ \Phi_i \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Iz zgornje enačbe je takoj razvidno, da fotoni, ki istočasno zapustijo kroglico (t.j. ob času $T_i = 0$) v sistemu S , niso istočasno sprejeti v sistemu S' . Opazovalec, ki se nahaja v sistemu S , vidi kroglico okroglo, opazovalec v sistemu S' pa ne. Poleg tega opazovalec v sistemu S' zaradi aberacije svetlobe in Dopplerjevega pojava vidi kroglico svetlejšo in bolj modro, ko se ta premika proti njemu in temnejšo in bolj rdečo, ko se odmika od njega.

Gibanje kroglice je razdeljeno na gibanje središča \mathcal{P}_c po enačbi orbite za masne delce [8, 12, 13, 14, 15] in na vzporedno premikanje vektorjev \vec{r}_i . Ko se kroglica premika, dobimo v vsaki naslednji središčni točki nove bazne vektorje \vec{e}'_μ po enačbi:

$$\vec{e}'_{\mu,\lambda} = \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \vec{e}'_\sigma. \quad (9)$$

Tu je z vejico označeno odvajanje $\vec{e}'_{\mu,\lambda} = \frac{\partial \vec{e}'_\mu}{\partial x^\lambda}$, Christofflove simbole $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ pa dobimo iz matrike $g_{\mu\nu}$:

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\nu,\lambda} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma}). \quad (10)$$

Ker smo vektor \vec{r}_i v enačbi (7) zapisali z vektorji $\hat{\varepsilon}'_\mu$ in ne z \vec{e}'_μ , zapišemo s pomočjo enačbe (3) enačbo vzporednega premika še za vektorje $\hat{\varepsilon}'_\mu$:

$$\dot{\hat{\varepsilon}}'_\mu = \frac{\dot{\vec{e}}'_\mu}{\sqrt{|g_{\mu\mu}|}} - \frac{1}{2} \frac{\vec{e}'_\mu}{|g_{\mu\mu}|^{3/2}} |g_{\mu\mu}|_{,\lambda} \dot{x}^\lambda, \quad (11)$$

kjer je s piko označeno odvajanje po lastnem času $\dot{\hat{\varepsilon}}'_\mu = d\hat{\varepsilon}'_\mu/d\tau$. Z upoštevanjem enačbe (9) in zveze $|g_{\mu\mu}|_{,\lambda} = 2\eta_{\mu\mu}\Gamma^\mu_{\mu\lambda}$ dobimo:

$$\dot{\hat{\varepsilon}}'_\mu(\tau) = \Omega_\mu{}^\nu(\tau) \hat{\varepsilon}'_\nu(\tau), \quad (12)$$

kjer je matrika $\Omega_\mu{}^\nu$ enaka:

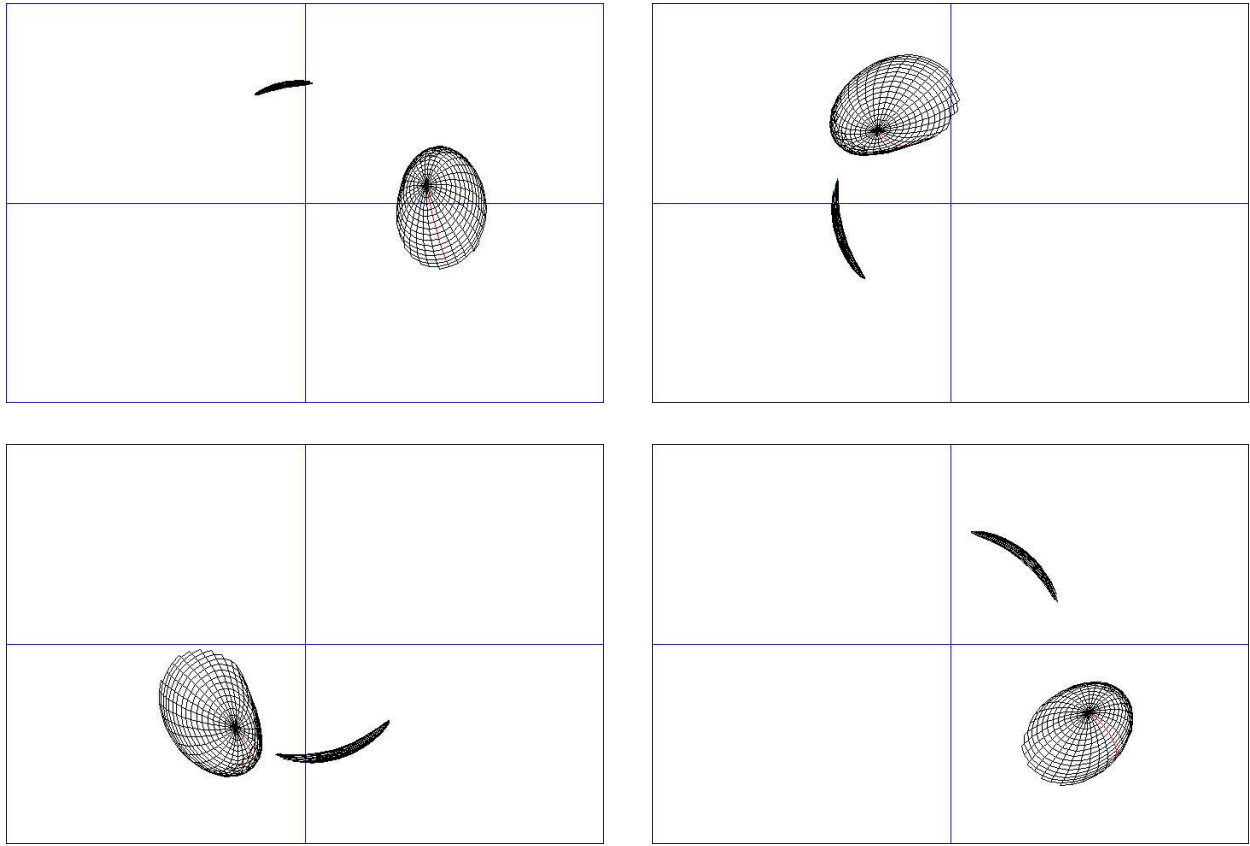
$$\Omega_\mu{}^\nu = \left[\left(\frac{\eta_{\nu\nu} g_{\mu\nu}}{\eta_{\mu\mu} g_{\mu\mu}} \right)^{1/2} \Gamma^\nu_{\mu\lambda} - \delta_\mu{}^\nu \frac{\Gamma_{\mu\mu\lambda}}{g_{\mu\mu}} \right] \dot{x}^\lambda. \quad (13)$$

Torej se vektorji $\hat{\varepsilon}'_\mu$ ob nekem kasnejšem času $\tau + d\tau$ zapišejo:

$$\hat{\varepsilon}'_\mu(\tau + d\tau) = \hat{\varepsilon}'_\mu(\tau) + \dot{\hat{\varepsilon}}'_\mu(\tau) d\tau = (\delta_\mu{}^\nu + \Omega_\mu{}^\nu(\tau)) \hat{\varepsilon}'_\nu(\tau). \quad (14)$$

Na ta način dobimo novo ortonormirano bazo $\hat{\varepsilon}'_\mu$ v novi središčni točki kroglice in nov koordinatni sistem S' v katerem so vektorji \vec{r}_i zapisani na enak način kot v enačbi (7).

Ko kroglico premikamo tako, da vzporedno premikamo vektorje \vec{r}_i , pride do še enega relativističnega pojava – Thomasove precesije. Opazovalec, ki miruje glede na črno luknjo, vidi kroglico vrteti se okoli lastne osi (slika 4).



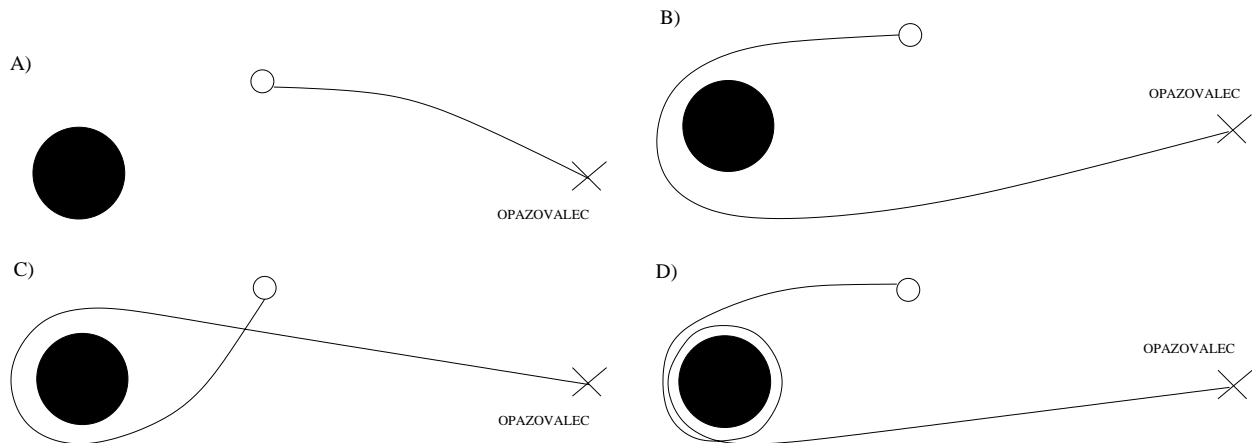
Slika 4: Slike kroglice pri opazovalcu ob časih $5043M$, $5065M$, $5080M$ in $5100M$. Zaradi močnega gravitacijskega lečenja in velike hitrosti v bližini črne luknje je slika kroglice precej deformirana. Lečenje je tako močno, da se poleg primarne slike, ki jo ustvarijo fotoni, ki grejo po najkrajši poti do opazovalca, pojavi tudi sekundarna slika, ki jo ustvarijo fotoni, ki so šli do opazovalca po drugi strani črne luknje. Eden izmed poldnevnikov je pobarvan rdeče, da se lažje vidi rotacijo – Thomasovo precesijo. Podatki o kroglici: $r_{zac} = 10M$, $\varphi_{zac} = 0^\circ$, $\theta_{zac} = 90^\circ$, $\tilde{l} = 2.01$, $r_k = 2M$. Podatki o opazovalcu: $r_{op} = 5000M$, $\theta_{op} = 0^\circ$, $\varphi_{op} = 0^\circ$.

2.2 Sledenje žarkov

Opazovalec se nahaja v točki $\mathcal{P}_f = (t_f, r_f, \theta_f, \varphi_f)$, fotoni pa se izsevajo v točkah $\mathcal{P}_i = (t_i, r_i, \theta_i, \varphi_i)$. Torej je potrebno povezati ti dve točki s svetlobno geodetko. Metoda je podrobno opisana v literaturi [14, 13, 8, 16], zato jo bom opisal zelo na kratko.

Pri povezovanju dveh točk s svetlobno geodetko, je potrebno poiskati konstante gibanja, ki določajo orbito fotona. Iz znane začetne in končne točke dobimo velikost vrtilne količine (l), dolžino dvižnega vozla (Ω) in inklinacijo orbite (ε), kar naredimo za vsako točko \mathcal{P}_i na površju kroglice. Te konstante določajo, kje bo foton viden na sliki.

Najenostavneje je, če je opazovalec obrnjen proti črni luknji. V tem primeru je koordinatni sistem slike S'' enak sferičnemu koordinatnemu sistemu črne luknje na mestu opazovalca (slika 3).



Slika 5: Različne poti fotonov od točke na površju kroglice do opazovalca. Slike, ki ustrezajo posameznim fotonom, so prikazane na sliki 6.

Koordinati x in y na sliki se preprosto izražata s konstantami $a \propto 1/l$, Ω , ε in končno točko \mathcal{P}_f :

$$x = -\frac{1 \cos \varepsilon}{a \sin \theta_f} \quad (15)$$

$$y = \frac{1}{a} \sin \varepsilon \cos(\varphi_f - \Omega) . \quad (16)$$

V začetni točki je potrebno še ugotoviti, ali je foton dejansko odletel proč od kroglice, ali pa se je “zabil” v tla. To pomeni, da mora biti skalarni produkt med smerjo fotona \vec{k} in normalnim vektorjem \hat{n} v začetni točki na površini kroglice pozitiven:

$$\vec{k} \cdot \hat{n} > 0 , \quad (17)$$

kjer so komponente vektorja \vec{k} v sistemu S''' enake:

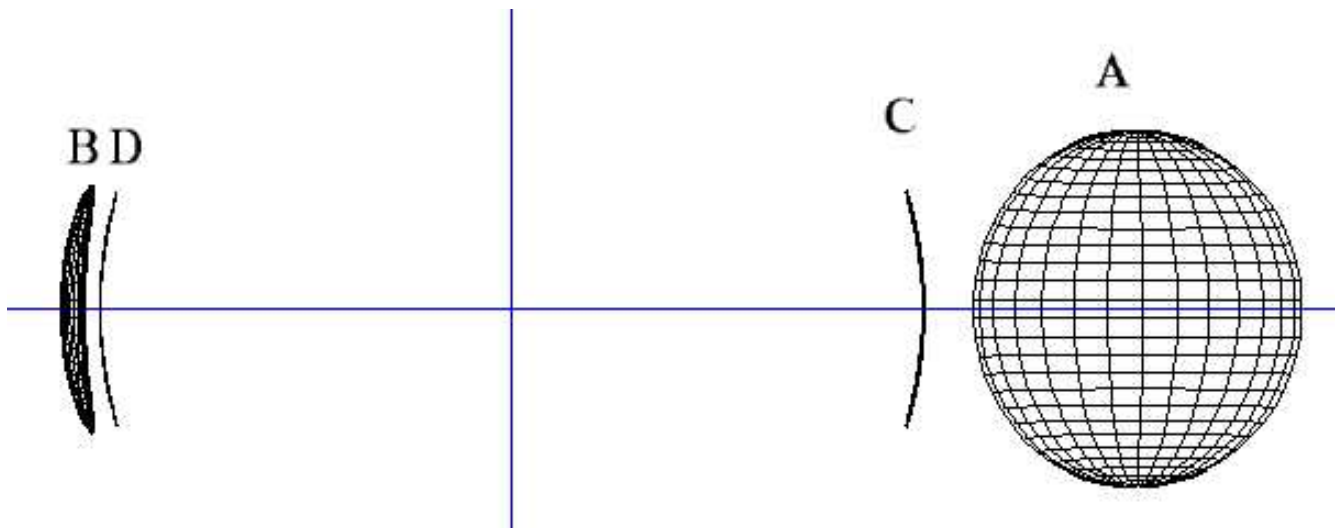
$$k_r = \pm \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - u_i^2 (1 - u_i)} \quad (18)$$

$$k_\theta = -\frac{u_i}{a} \sin \varepsilon \cos(\varphi_i - \Omega) \quad (19)$$

$$k_\varphi = \frac{u_i \cos \varepsilon}{a \sin \theta_i} , \quad (20)$$

pri čemer je $u_i = 2M/r_i$, $M = 2GM'/c^2$ in M' masa črne luknje. V enačbi (18) velja pozitiven predznak za fotone, ki se oddaljujejo od črne luknje, negativen pa za tiste, ki se približujejo črni luknji.

Zaradi močnega gravitacijskega lečenja je pričakovati, da pridejo do opazovalca tudi nekateri fotoni iz tiste strani kroglice, ki je obrnjena proč od opazovalca. Da pride do tega, morajo biti že na začetku izsevani v smeri *proč* od opazovalca, torej proti črni luknji! Nekaj primerov možnih poti fotonov od kroglice do opazovalca je skiciranih na sliki 5. Kaj dejansko vidi opazovalec je prikazano na sliki 6: fotoni, ki so šli po različnih poteh, ustvarijo različne slike na mestu opazovalca. Na podoben način bi lahko povečevali število različnih poti fotonov, da bi dobili še več različnih slik. V resnici pa to nima smisla, ker imajo fotoni, ki večkrat obkrožijo črno luknjo, vsi skoraj enak



Slika 6: Različne slike, ki jih naredijo fotoni, ki so šli po različnih poteh od izvira do opazovalca. Oznake A, B, C in D ustrezajo oznakam na sliki 5. Slika A je primarna, slika B pa sekundarna.

parameter a iz enačb (15 – 16). Posledica pa je, da so na istem mestu na sliki pri opazovalcu, kar pomeni, da se slike več ne ločijo med sabo.

Da bi dobili pravilno sliko pri opazovalcu ob nekem času, je potrebno upoštevati čase, ki jih porabijo fotoni od izvira do opazovalca. Očitno je, da fotoni iz slike 5a porabijo precej manj časa do opazovalca, kot pa tisti iz slike 5d. Zato slika 6 ni čisto pravilna slika pri opazovalcu, ker niso bili upoštevani časi fotonov. Pravilna pa je slika 4, kjer so upoštevani različni časi izseva fotonov (različni v sistemu S' , enaki v sistemu S) in različni časi sprejema fotonov pri opazovalcu v sistemu S'' . Takoj se vidi, da nista sliki A in B nikoli ena nasproti druge, kot je to prikazano na sliki 6, ampak slika B zaostaja za sliko A, ker potrebujejo fotoni po poti (b) precej več časa kot po poti (a).

3 Svetlost telesa pri opazovalcu in masa črne luknje

Različne čase sprejema fotonov pri opazovalcu upoštevamo na naslednji način. Če foton iz točke \mathcal{P}_i na krogli prileti na sliko npr. ob času t_1 na točko $T_1 = (x_1, y_1)$ in ob času t_2 na točko $T_2 = (x_2, y_2)$, lahko z interpolacijo izračunamo na katero točko $T = (x, y)$ na sliki prileti ob nekem vmesnem času $t \in [t_1, t_2]$. Ko se kroglica premika vzdolž orbite, za vsak izsevan foton izračunamo lego na sliki in čas ob katerem prileti na sliko, potem pa z interpolacijo dobimo pravilno sliko kroglice pri opazovalcu ob poljubnem času t .

Na enak način interpoliramo tudi frekvenco izsevanega fotona in intenziteto svetlobe. Kroglica seva fotone z isto frekvenco ν_0 in intenziteto I_0 v sistemu S , ki se giblje skupaj s kroglico. V sistemu S''' , ki miruje glede na črno luknjo, pa opazovalec izmeri drugačno frekvenco ν_i in intenziteto I_i

zaradi Dopplerjevega pojava in aberacije svetlobe:

$$\nu_i = \frac{\nu_0}{\gamma(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k})} \quad (21)$$

$$I_i = \frac{I_0}{\gamma^4(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{k})^3}, \quad (22)$$

kjer je $\vec{\beta}$ hitrost kroglice v sistemu S''' , $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ in $\hat{k} = \vec{k}/|\vec{k}|$ smer fotona v sistemu S''' .

Prav tako opazovalec v sistemu S'' izmeri drugačno frekvenco ν_f in intenziteto I_f od opazovalca v sistemu S''' zaradi razlike med gravitacijskim poljem na mestu kroglice in na mestu slike:

$$\nu_f = g\nu_i \quad (23)$$

$$I_f = g^2 I_i, \quad (24)$$

kjer je faktor g enak:

$$g = \sqrt{\frac{1 - u_i}{1 - u_f}}. \quad (25)$$

Moč, sprejeto pri opazovalcu, izračunamo po naslednjem premisleku. Kroglica je na sliki sestavljena iz nekakšnih kvadratkov oz. trikotnikov in vsako oglišče takega trikotnika ima neko znano intenziteto. Torej bi moč dobili z integracijo intenzitete po ploščini takega trikotnika. Pri zadosti velikem številu točk pa so ploščine trikotnikov majhne in se intenzitete v ogliščih enega trikotnika precej malo razlikujejo med sabo, zato je bolj enostavno izračunati moč kar z množenjem nekakšne povprečne intenzitete s ploščino trikotnika.

Najprej poiščemo kako se intenziteta spreminja po notranjosti enega trikotnika. Oglišča trikotnika naj bodo podana s koordinatami in intenziteto na tem mestu:

$$T_1 = (x_1, y_1, I_1) \quad (26)$$

$$T_2 = (x_2, y_2, I_2) \quad (27)$$

$$T_3 = (x_3, y_3, I_3). \quad (28)$$

Intenziteto v notranjosti tega trikotnika dobimo kar z linearno interpolacijo (enačba ravnine):

$$I(x, y) = \left([x(y_3 - y_2) + y(x_2 - x_3) + x_3y_2 - x_2y_3] I_1 \right. \quad (29)$$

$$\left. + [x(y_1 - y_3) + y(x_3 - x_1) + x_1y_3 - x_3y_1] I_2 \right. \quad (30)$$

$$\left. + [x(y_2 - y_1) + y(x_1 - x_2) + x_2y_1 - x_1y_2] I_3 \right) \quad (31)$$

$$\times \left((x_2 - x_3)y_1 + (x_3 - x_1)y_2 + (x_1 - x_2)y_3 \right)^{-1}. \quad (32)$$

Pri izračunu moči, namesto povprečne intenzitete uporabimo intenziteto I^* , ki jo dobimo v "težišču" $T^* = (x^*, y^*)$ trikotnika:

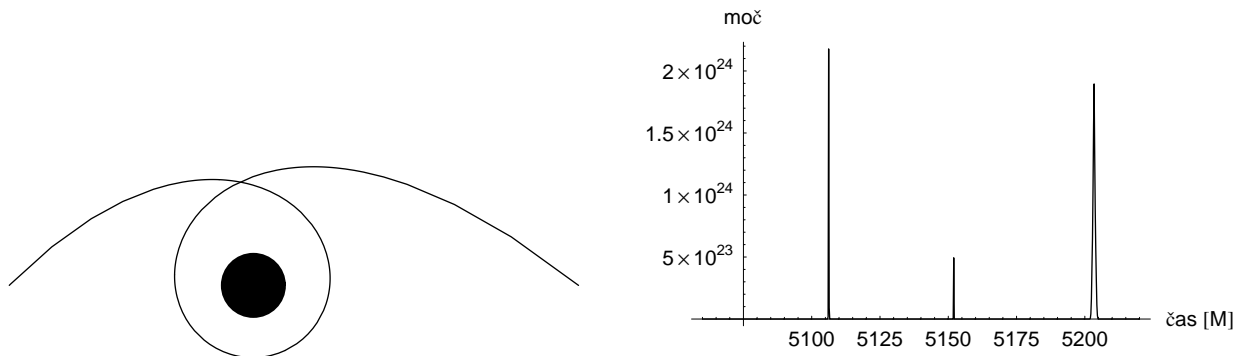
$$x^* = \frac{I_1 x_1 + I_2 x_2 + I_3 x_3}{I_1 + I_2 + I_3} \quad (33)$$

$$y^* = \frac{I_1 y_1 + I_2 y_2 + I_3 y_3}{I_1 + I_2 + I_3}. \quad (34)$$

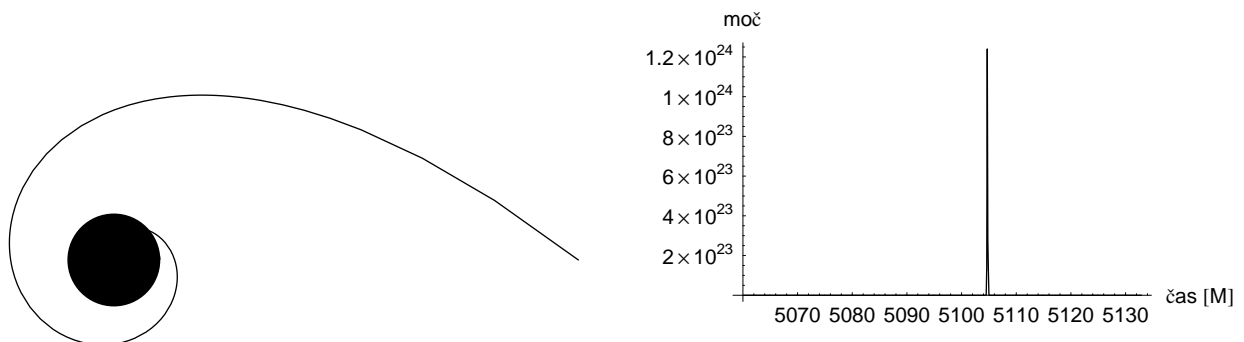
Prejeta moč za en trikotnik je potem enaka:

$$P_{\Delta} = \int_{\Delta} I_f(x, y) dx dy \approx I_f^*(x^*, y^*) \Delta S . \quad (35)$$

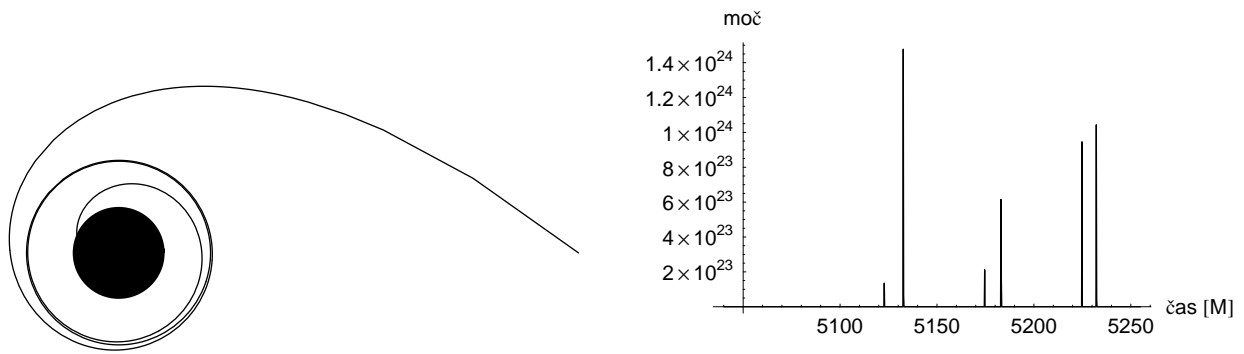
S seštevanjem po vseh trikotnikih dobimo skupno moč, ki jo prejme opazovalec. Nekaj primerov svetlobnih krivulj pri različnih vrednostih vrtilne količine kroglice in različnih legah opazovalca glede na kroglico in črno luknjo je na slikah 7 – 10.



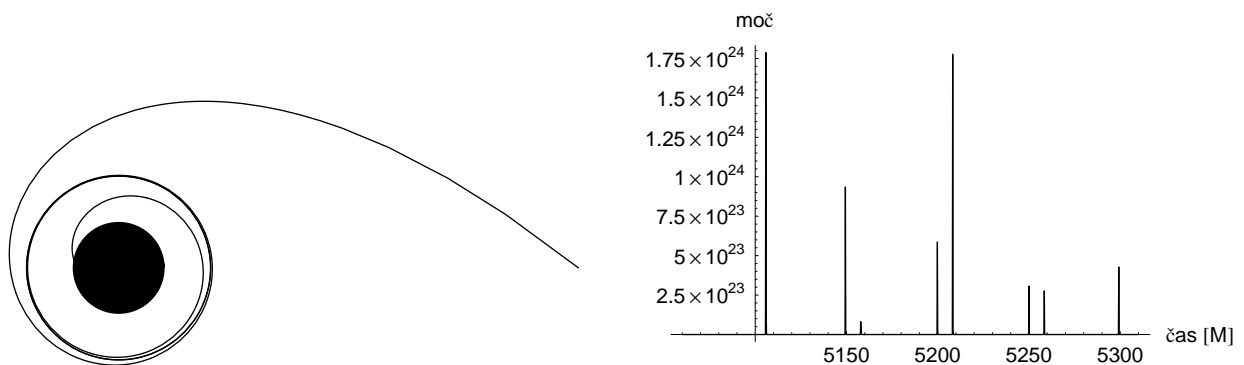
Slika 7: Orbita kroglice (levo) za $\tilde{l} = 2.01$ in moč pri opazovalcu (desno). Kroglica pri tej vrednosti \tilde{l} ne pade v črno luknjo, ampak se ji samo približa do neke razdalje, potem pa se spet odmika. Opazovalec je na desni in ni označen na sliki, ker je na razdalji $5000M$. Kroglica je na začetku med opazovalcem in črno luknjo in se odmika od opazovalca.



Slika 8: Orbita kroglice (levo) za $\tilde{l} = 1.97$ in moč pri opazovalcu (desno). Kroglica naredi en krog okoli črne luknje preden pade vanjo. Opazovalec je na desni. Kroglica je na začetku med opazovalcem in črno luknjo in se odmika od opazovalca.



Slika 9: Orbita kroglice (levo) za $\tilde{l} = 1.999999$ in moč pri opazovalcu (desno). Kroglica naredi 3 kroge okoli črne luknje preden pade vanjo. Opazovalec je na levi. Črna luknja je na začetku med opazovalcem in kroglico. Kroglica se na začetku približuje opazovalcu. Vidni so dvojni vrhovi: zgodnejši pripadajo sekundarnim slikam, poznejši pa primarnim in sledijo sekundarnim čez $10M$. Vsakič, ko se kroglica približuje, vidi opazovalec par bliskov. Ker je kroglica trikrat obkrožila črno luknjo, opazovalec vidi 3 pare bliskov.



Slika 10: Levo: Orbita kroglice (levo) za $\tilde{l} = 1.99999999$ in moč pri opazovalcu (desno). Kroglica naredi 4 kroge okoli črne luknje preden pade vanjo. Opazovalec je na desni. Kroglica je na začetku med opazovalcem in črno luknjo in se odmika od opazovalca. Opazovalec vidi 8 bliskov (4 sekundarne in 4 primarne), ker je kroglica štirikrat obkrožila črno luknjo.

V primerih, ko kroglica večkrat obkroži črno luknjo, se pojavi več vrhov oz. bliskov svetlobe. Ti vrhovi si sledijo na vsakih $50M$, kar se ujema z obhodnim časom na kritični razdalji $4M$. V nekaterih primerih se pojavijo dvojni vrhovi (sliki 9 in 10), ki so posledica zaostajanja sekundarnih fotonov za primarnimi: sekundarni vrhovi se pojavijo $10M$ pred primarnimi. Poleg tega se v posameznem primeru razmerje v višini primarnih in sekundarnih vrhov spreminja: prispevki sekundarnih slik so včasih večji od prispevkov primarnih, kar je odvisno od lege opazovalca glede na orbito kroglice.

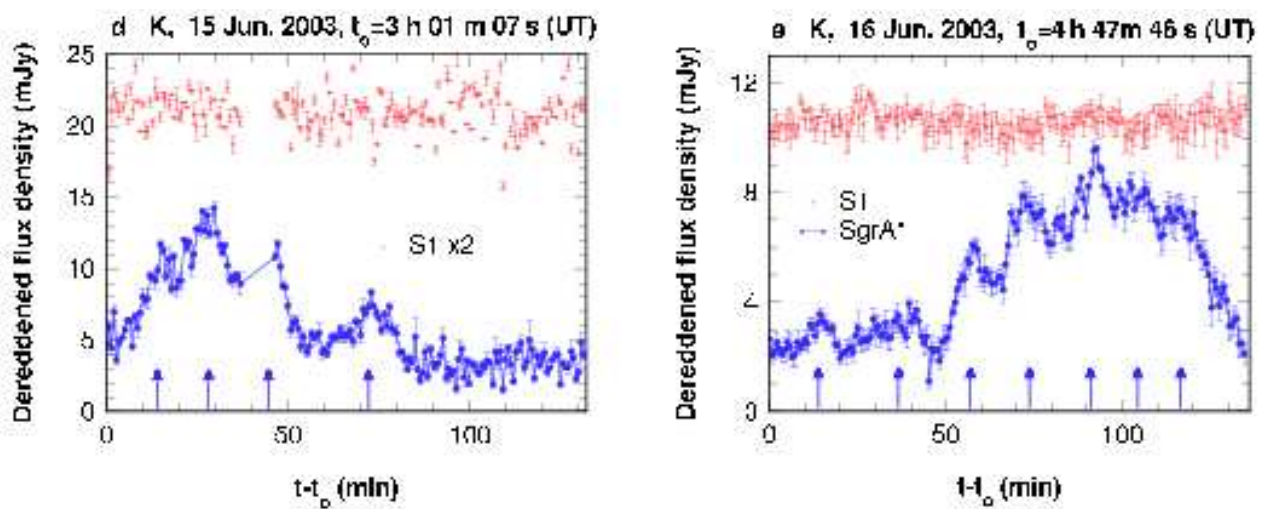
3.1 Masa črne luknje

Maso črne luknje M je zelo enostavno poiskati iz izmerjene časovne razlike Δt med posameznimi vrhovi in časovne razlike Δt_M dobljene po modelu:

$$M = \frac{c^3 \Delta t}{G \Delta t_M}, \quad (36)$$

kjer je Δt_M izražena v enotah M .

Svetlobna krivulja novejšega bliska iz središča naše galaksije je na sliki 11. Vidnih je več vrhov, trije pa so bolj izraziti, kar pomeni, da je telo najverjetneje trikrat obkrožilo črno luknjo, preden je vanjo padlo. Tak primer modela je na sliki 9. Iz slike 11 (desno) ocenimo čase, ko se

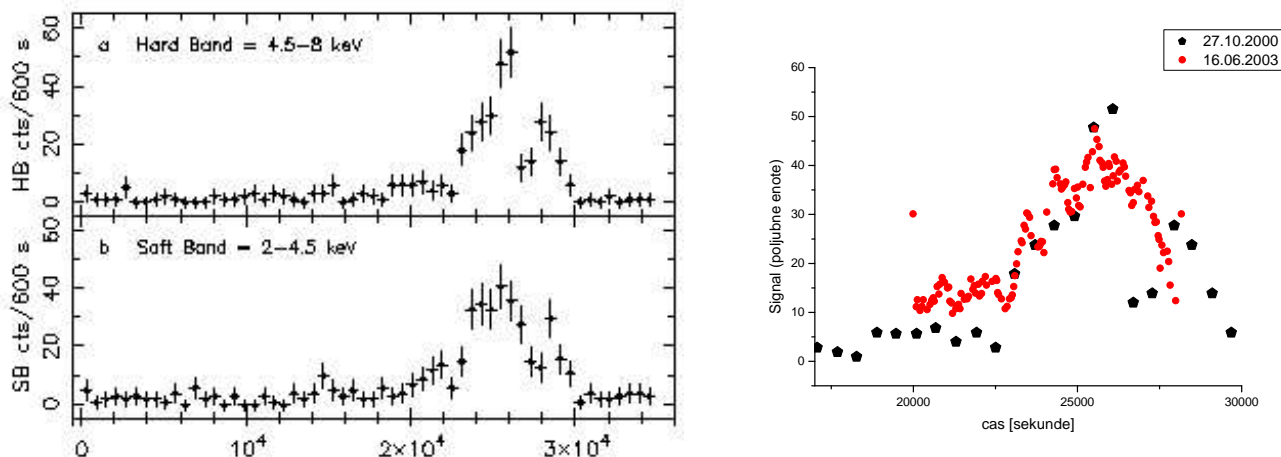


Slika 11: Svetlobna krivulja bliska infra rdeče svetlobe z dne 16. junija 2003 [17].

pojavi trije vrhovi: 58 min, 72 min in 91 min. Torej je časovna razlika med prvim in drugim vrhom $\Delta t \approx 840s$ in med drugim in tretjim $\Delta t \approx 1140s$. Iz grafa na sliki 9 vidimo, da sta po modelu padanja kroglice v črno luknjo razliki med vrhovoma $\Delta t_M \approx 50M$ v obeh primerih. Iz tega dobimo po enačbi (36) dve oceni za maso črne luknje: $68 \cdot 10^{35} kg$ in $92 \cdot 10^{35} kg$. Z upoštevanjem, da je masa Sonca $M_\odot = 2 \cdot 10^{30} kg$, lahko dobljene mase črne luknje izrazimo z maso Sonca: $3.4 \cdot 10^6 M_\odot$ in $4.6 \cdot 10^6 M_\odot$.

Mase, dobljene z merjenjem gibanja zvezd v središču zvezd, pa so: $3.7 \cdot 10^6 M_\odot$ [18], $2.6 \cdot 10^6 M_\odot$, $3.3 \cdot 10^6 M_\odot$ [2] in $2.7 \cdot 10^6 M_\odot$ [19].

Svetlobna krivulja prvega bliska rentgenske svetlobe iz uvoda (slika 2) je na sliki 12 (levo). Vidna sta dva vrhova, ampak je časovna razlika med njima $\Delta t \approx 2000s$ za zgornjo sliko in $\Delta t \approx 2500s$ za spodnjo sliko, kar je približno dvakrat več kot v prejšnjem primeru. Ker se bliski pojavljajo na $\Delta t_M \approx 50M$, bi v tem primeru dobili preveliko maso črne luknje! Razlog za neujemanje tiči v slabi časovni ločljivosti starejšega primera. Na sliki 12 (desno) je primerjava obeh bliskov: jasno je, da sta bliska samo dva, ker ostali niti niso bili izmerjeni. Presenetljivo pa je, da se oba bliska zelo dobro ujemata v trajanju.



Slika 12: Levo: Svetlobna krivulja bliska rentgenske svetlobe z dne 26-27 oktobra 2000 [7]. Na x osi je čas v sekundah. Desno: Primerjava bliskov z dne 26-27 oktobra 2000 in 16. junija 2003.

4 Zaključek

Ker naša galaksija vsebuje supermasivno črno luknjo, se lahko zgodi, da kakšno nebesno telo pade vanjo, kar je tudi bilo opaženo kot bliski rentgenske in infra rdeče svetlobe. S preprostim modelom padca majhnega in togega telesa v črno luknjo ugotovimo, da je čas med posameznimi bliski odvisen od mase črne luknje. Pri tem modelu je zelo pomembno upoštevanje vseh relativističnih pojavov kot so gravitacijsko lečenje, aberacija svetlobe in Dopplerjev pojav. Zaradi močnega lečenja se pojavi tudi sekundarna slika, ki nastane zaradi tistih fotonov, ki pridejo do opazovalca po drugi strani črne luknje. Poleg tega je zelo pomembno upoštevanje časa, ki ga porabijo fotoni do opazovalca, da dobimo pravilno sliko pri opazovalcu.

Padec telesa v črno luknjo vidi opazovalec kot zaporedje bliskov. Vsakič, ko telo obkroži črno luknjo, nastane en blisk ali par bliskov. Razmerje med jakostjo sekundarnih in primarnih bliskov se v času spreminja in je odvisno tudi od lege opazovalca glede na orbito kroglice.

Iz časovne razlike med posameznimi bliski je možno izračunati maso črne luknje. Dobljeni rezultati se precej dobro ujemajo z meritvami, glede na to, da je bil uporabljen zelo preprost model padca telesa v črno luknjo.

Literatura

- [1] R. P. van der Marel, H. W. Rix, D. Carter, M. Franx, S. D. M. White and T. de Zeeuw. *MNRAS* **268**, 521 (1994).
- [2] R. Genzel, C. Pichon, A. Eckart, O. E. Gerhard and T. Ott. *MNRAS* **317**, 348 (2000).
- [3] A. M. Ghez, M. Morris, E. E. Becklin, A. Tanner and T. Kremenek. *Nature* **407**, 349 (2000).
- [4] R. Schödel, T. Ott and R. G. et.al. *Nature* **419**, 694 (2002).

- [5] M. E. Nord, T. J. W. Lazio, N. E. Kassim, W. M. Goss and N. Duric. *Astrophys. J.* **601**, L51 (2004).
- [6] F. K. Baganoff, Y. Maeda, M. Morris, M. W. Bautz, W. N. Brandt, W. Cui, J. P. Doty, E. D. Feigelson, G. P. Garmire, S. H. Pravdo, G. R. Ricker and L. K. Townsley. *Astrophys. J.* **591**, 891 (2003).
- [7] F. K. Baganoff, M. W. Bautz, W. N. Brandt, G. Chartas, E. D. Feigelson, G. P. Garmire, Y. Maeda, M. Morris, G. R. Ricker, L. K. Townsley and F. Walter. *Nature* **413**, 45 (2001).
- [8] A. Gomboc. Ph.D. thesis, Univ. Ljubljana (2001).
- [9] S. Komossa, J. Halpern, N. Scharrel, G. Hasinger, M. Santos-Lleo and P. Predehl. A Huge Drop in X-ray Luminosity of the Non-Active Galaxy RXJ1242.6-1119A, and First Post-Flare Spectrum - Testing the Tidal Disruption Scenario (2004). Astro-ph/0402468.
- [10] A. Gomboc and A. Čadež. *Astrophys. J.* (2005).
- [11] A. Goldwurm, E. Brion, P. Goldoni, P. Ferrando, F. Daigne, A. Decourchelle, R. S. Warwick and P. Predehl. *Astrophys. J.* **584**, 751 (2003).
- [12] A. Čadež, M. Brajnik, A. Gomboc, M. Calvani and C. Fanton. *Astron. & Astrophys.* **403**, 29 (2003).
- [13] U. Kostić. Bs thesis. Univ. Ljubljana (2003).
- [14] A. Čadež and U. Kostić. Optics in schwarzschild space-time (2004). Gr-qc/0405037.
- [15] A. Čadež and A. Gomboc. *Astron. & Astrophys. Suppl. Ser.* **119**, 293 (1996).
- [16] M. Brajnik. Bs thesis. Univ. Ljubljana (1999).
- [17] R. Genzel, R. Schödel, T. Ott, A. Eckart, T. Alexander, F. Lacombe, D. Rouan and B. Aschenbach. *Nature* **425**, 934 (2003).
- [18] A. M. Ghez, S. Salim, S. D. Hornstein and A. T. et.al. Stellar orbits around the galactic center black hole (2004). Astro-ph/0306130.
- [19] B. Aschenbach, N. Grosso, D. Porquet and P. Predehl. *Astron. & Astrophys.* **417**, 71 (2004).