

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Uroš Kostić

**Računanje orbit svetlobe v polju črne  
luknje**

DIPLOMSKO DELO

Mentor: prof.dr.Andrej Čadež

Ljubljana, junij 2003



## **Izjava**

*Izjavljam, da sem diplomsko delo izdelal samostojno pod vodstvom mentorja,  
prof.dr. Andreja Čadeža.*

*Ljubljana, junij 2003*

*Uroš Kostić*



*Zahvaljujem se mentorju prof. dr. Andreju Čadežu za čas, potrpljenje in pomoč pri nastajanju tega dela.*

*Zahvaljujem se tudi Andreji Gomboc, ker je vedno našla dober nasvet in čas za preverjanje mojih rezultatov.*



### Povzetek

Veliko pojavov v vesolju lahko razložimo s padanjem snovi na črno luknjo. Da bi lahko izdelali modele teh pojavov, je potrebno poznati orbite tako delcev kot tudi fotonov, ker le-ti prenašajo informacijo do detektorjev. V diplomskem delu sem poiskal analitične rešitve za čas potovanja fotonov med dvema poljubnima točkama in naredil program, ki nariše orbito in izračuna čas potovanja med tema dvema točkama. Rešitve sem preizkusil s programom, ki prikaže razširjanje prvotno krogelnega vala v okolici črne luknje.

**Ključne besede:** *Črne luknje, Numerična relativnost, Relativnost in gravitacija*

**PACS:** 97.60.Lf, 04.25.Dm, 95.30.Sf

### Abstract

There are many phenomena in universe which can be explained with accretion of matter onto a black hole. In order to make models of these phenomena, one needs to know the orbit equations of particles and photons, since photons carry the information to detectors. In this diploma thesis I derive analytic solutions for the time of flight of photons and make a computer program which draws the photon orbit and calculates the time of flight between two arbitrary points. Solutions were tested with a computer program which shows the propagation of a spherical wave in the vicinity of a black hole.

**Keywords:** *Black holes, Numerical relativity, Relativity and gravitation*

**PACS:** 97.60.Lf, 04.25.Dm, 95.30.Sf





## Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Enačbe gibanja in njihove rešitve</b>	<b>12</b>
2.1	Enačbe in konstante gibanja . . . . .	12
2.2	Tipi orbit . . . . .	17
2.3	Analitična rešitev enačbe orbite . . . . .	19
2.3.1	Tip A . . . . .	19
2.3.2	Tip B . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Povezava dveh točk s svetlobno geodetko</b>	<b>22</b>
3.1	Kotni del . . . . .	22
3.2	Radialni del . . . . .	23
3.2.1	Tip A . . . . .	23
3.2.2	Tip B . . . . .	27
3.3	Časovni del . . . . .	29
3.3.1	Tip A . . . . .	29
3.3.2	Tip B . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Širjenje svetlobe v bližini črne luknje</b>	<b>44</b>
<b>5</b>	<b>Zaključek</b>	<b>48</b>
<b>A</b>	<b>Dodatek</b>	<b>49</b>
A.1	Hamiltonova funkcija $H$ za fotone in masne delce . . . . .	49
A.2	Vrtilna količina - konstanta gibanja . . . . .	50
A.3	Razvoj v vrsto $f(u, a)$ okoli točke $u = \frac{2}{3}$ . . . . .	51



# 1 Uvod

Že Isaac Newton se je spraševal, ali njegov gravitacijski zakon velja tudi za svetlobo, torej če se tudi svetloba odkloni v gravitacijskem polju nekega telesa. Leta 1783 je astronom J. Michell predlagal Cavendishu, da bi se mogoče dalo določiti maso zvezde tako, da bi izmerili, za koliko se zmanjša hitrost svetlobe, ki zapušča zvezdo. Cavendish je takoj dobil rešitev in prvi izračunal odklon svetlobe. To je vzpodbudilo Laplacea, da si je zamislil telo, ki bi bilo tako masivno, da ga ne bi mogla zapustiti niti svetloba. Zgolj po naključju je dobil točen rezultat za velikost takega telesa z maso  $M$ :

$$R_{Sch} = \frac{2GM}{c^2},$$

kar je znano kot Schwarzschildov radij<sup>1</sup>. Površina  $4\pi R_{Sch}^2$  je t.i. horizont dogodkov in omejuje območje, iz katerega zunanji opazovalec ne more dobiti nobene informacije. Vsa masa črne luknje je zbrana v središču tega območja pri  $r = 0$ .

Teoretske osnove za črne luknje je postavil Einstein v začetku 20. stoletja s splošno teorijo relativnosti. Kmalu po objavi, je Schwarzschild poiskal rešitve Einsteinovih Enačb, za katere se je izkazalo, da opisujejo nerotirajoče črne luknje. Kasneje, leta 1963, je Kerr odkril rešitve, ki opisujejo rotirajoče črne luknje. Pomemben korak k razumevanju nastanka črnih lukenj je leta 1939 prispeval Oppenheimer. Odkril je, da se zvezde, ki so na koncu svojega življenja težje od  $2 - 3M_{\odot}$ , sesedejo v črno luknjo. V šestdesetih letih se je začelo teoretično raziskovanje črnih lukenj. Eno izmed najpomembnejših odkritij v tistem času je to, da "črna luknja nima las". To pomeni, da zunanji opazovalec, razen mase, vrtilne količine in naboja, ne more dobiti nobenih podrobnosti o črni luknji.

Ker črne luknje ne oddajajo nobene svetlobe, jih lahko zaznamo le preko pojavov, ki jih v okolici povzročajo s svojim močnim gravitacijskim poljem. Prve eksperimentalne potrditve za obstoj črnih lukenj so se začele pojavljati v sedemdesetih letih. Za najboljši način odkrivanja črnih lukenj se je izkazala detekcija rentgenskega sevanja, ki nastane pri akreciji snovi na črno luknjo. Ker se pri tem sprosti ogromno energije, so črne luknje postale priljubljene kot pojasnilo za velik izsev nekaterih objektov v vesolju.

En tip takih objektov so tesne dvojne zvezde. V takem sistemu je ena od zvezd nevidna. Da gre v resnici za dve zvezdi, se da ugotoviti s pomočjo spektra - periodični dopplerski premik je edini znak, da gre za dvozvezdje, kjer je ena od komponent prešibka, da bi bila vidna. Iz spektra dobimo periodo, naklon orbite, hitrost in maso vidne zvezde. Iz teh podatkov se da določiti spodnjo mejo za maso nevidne zvezde. Če je ta masa precej večja od  $\sim 2M_{\odot}$  potem je nevidna zvezda črna luknja. Tak sistem je močan vir rentgenskega sevanja. Do tega pride, ko snov spremljevalke pada proti črni luknji in se nabira v disku okoli nje. Pri tem se močno segreje in seva v rentgenski svetlobi. Primera takih dvojnih sistemov, ki vsebujejo črno luknjo nekaj mas Sonca, sta Cyg X1 in A0620-00.

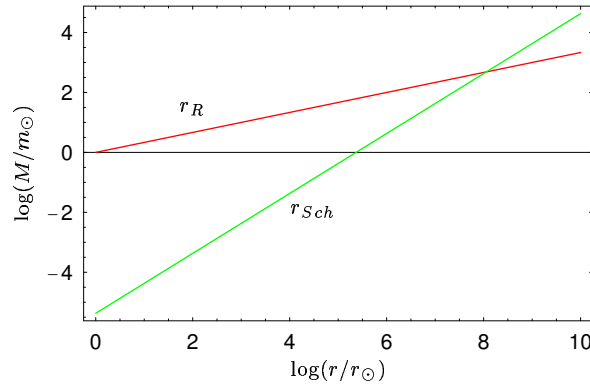
<sup>1</sup>Za Sonce je  $R_{Sch} = 2.96\text{km}$ , za Zemljo  $8\text{mm}$ , zame pa  $10^{-25}\text{m}$ .

Drugi tip objektov, ki najverjetneje vsebujejo črno luknjo, so izbruhi žarkov gama. Zanje je značilno, da v zelo kratkem času (npr. nekaj sekund) izsevajo toliko energije, kot da bi celotno maso Sonca spremenili v energijo ( $M_{\odot}c^2 \approx 2 \cdot 10^{47} \text{ J}$ ), ali pa, da se v istem času sprosti toliko energije, kolikor jo izseva naša galaksija v sto letih. Ker so časi zelo kratki, mora biti izvor žarkov gama zelo majhen - bistveno manjši kot je galaksija. Vsem tem zahtevam (kratki časi, majhen izvor, zelo visoke energije) ustrezajo črne luknje.

Trenutno ni nobenega modela, ki bi lahko pojasnil vse značilnosti izbruhov žarkov gama. Še najbolj verjeten je t.i. model plimskega raztrganja zvezde. V tem modelu gre zvezda mimo supermasivne črne luknje, zaradi česar jo plimske sile raztrgajo. Da pride do tega, morata biti izpolnjena dva pogoja. Prvi je ta, da se mora zvezda z maso  $m$  in radijem  $r$  približati črni luknji z maso  $M$  na razdaljo, ki je manjša od Rochevega radija  $r_R$ :

$$r_R = \left( \frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} r ,$$

drugi pa je ta, da mora Rochev radij ležati izven Schwarzschildovega radija. To pomeni, da je naše Sonce lahko plimsko raztrgano le s črno luknjo, ki je manj masivna kot  $10^8 M_{\odot}$  (slika 1). Če je črna luknja masivnejša, leži Rochev radij za horizontom dogodkov. V tem primeru se zvezda ne deformira in jo črna luknja požre v celoti.

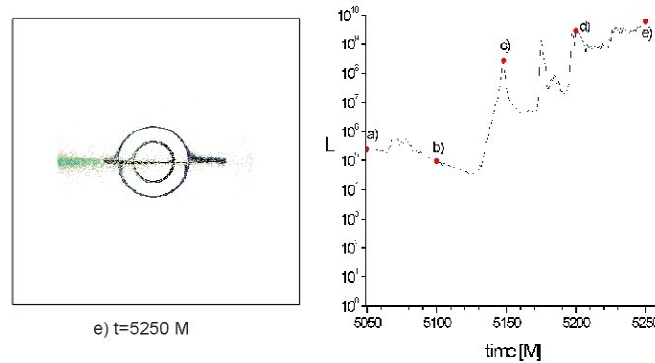


**Slika 1:** Log-log graf  $r_R = r_R(M/m_{\odot})$  (rdeča barva) in  $r_{Sch} = r_{Sch}(M/m_{\odot})$  (zeleno barva). Dokler je Rochev radij znotraj Schwarzschildovega, črna luknja požre zvezdo v celoti, če pa je  $r_R$  izven  $r_{Sch}$ , črna luknja zvezdo plimsko raztrga.

Pred kratkim so bile narejene simulacije srečanj med supermasivno črno luknjo in zvezdo sončevega tipa [1]. Simulacije kažejo, da se velike spremembe sija zgodijo na časovni skali nekaj  $M$  do nekaj  $100M$ .<sup>2</sup> Poleg tega je bilo ugotovljeno, da ima gravitacijsko lečenje pomembno vlogo pri obliki svetlobne krivulje. Ko pride do

<sup>2</sup>Za črno luknjo z maso  $10^6 M_{\odot}$  ti časi ustrezajo razponu od  $\approx 5 \text{ s}$  do  $\approx 10 \text{ min}$ , za črno luknjo z maso  $10^{10} M_{\odot}$  pa so časi enaki od 10 ur do nekaj mesecev.

lečenja, se določeni deli zvezde preslikajo v Einsteinov disk in tako močno povečajo navidezno svetlost (slika 2). Čeprav so bile v tem modelu zanemarjene vse interakcije med delci, se tako dobljene energije in časovne skale ujemajo z izmerjenimi.



**Slika 2:** Plimsko raztrgana zvezda, kot jo vidimo od strani.[1]

V modelu je bilo simulirano gibanje zvezde v bližini črne luknje z uporabo analitičnih rešitev enačb gibanja v splošni teoriji relativnosti. S sledenjem žarkov od izvora do oddaljenega opazovalca sta bili določeni svetlost in videz izvora. Fotoni, ki so prišli do opazovalca, so bili sortirani glede na čas, ki so ga porabili za to pot. Enačba orbite fotonov je bila znana v obliki  $r = r(\varphi)$ , čas pa je bil izračunan numerično.

Cilja diplomske naloge sta dva. Prvi je, poiskati analitično rešitev ( $r = r(t)$  oz.  $t = t(r)$ ) za čas potovanja fotona in s tem preveriti natančnost numerične metode v zgornjem modelu, drugi pa, z uporabo analitične rešitve raziskati, kako se širi svetlobni blisk v okolici črne luknje.

V diplomskem delu je najprej podan pregled enačb gibanja v okolici črne luknje z rešitvami za masne delce in fotone. Sledi primerjava med numerično metodo in analitičnimi rešitvami za čas potovanja fotonov. Na koncu je še prikazano kako se širi svetloba v okolici črne luknje.

## 2 Enačbe gibanja in njihove rešitve

Da bi opisali širjenje svetlobe v okolici črne luknje, je potrebno poznati rešitve enačb gibanja v gravitacijskem polju črne luknje. Tu bo podan kratek pregled enačb gibanja, konstant gibanja in njihovih rešitev v primeru Schwarzschildske metrike. Enačbe in rešitve bodo veljale tako za masne delce kot za fotone. Kakšne so razlike med orbitami delcev in fotonov je razloženo v podpoglavju *Tipi orbit* na strani 17.

Enačba orbite oblike  $r = r(t)$  oziroma  $t = t(r)$  bo podana kasneje, ko bo potrebno povezati dve točki s svetlobno geodetko.

### 2.1 Enačbe in konstante gibanja

Invariantna razdalja med dvema točkama v prostoru je enaka

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1)$$

kjer je  $g_{\mu\nu}$  metrični tenzor,  $x^\mu$  in  $x^\nu$  pa koordinate. V primeru Schwarzschildske črne luknje je  $g_{\mu\nu}$  v krogelnih koordinatah enak

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -(1 - \frac{2M}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-2M/r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (2)$$

kjer je  $M = \frac{GM'}{c^2}$  masa črne luknje z maso  $M'$ . Uporabljene enote so take, da je  $c = G = 1$ , torej je velikost Schwarzschildovega radija enaka  $R_{Sch} = 2M$ .

V splošni teoriji relativnosti dobimo enačbe gibanja iz Lagranževe funkcije

$$L' = \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}, \quad (3)$$

kjer so  $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$  koordinate, ki opisujejo lego v prostor-času in  $\dot{x}^\mu = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$  njihovi odvodi po lastnem času  $\tau$ .

Definiramo impulze<sup>3</sup>:

$$p_\mu = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}^\mu} \quad (4)$$

in z upoštevanjem enačbe (3) dobimo za impulze in odvode koordinat

$$p_\mu = -\frac{1}{L'} g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^\nu = -L' g^{\mu\nu} p_\mu \quad \text{in} \quad \dot{x}^\mu = -L' g^{\mu\nu} p_\nu. \quad (5)$$

Ko v Lagranževo funkcijo (3) vstavimo zgornje enačbe, dobimo zvezo

$$L'^2 = -L'^2 g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \quad \Rightarrow \quad g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = -1 \quad \text{ali} \quad 0 \quad \text{če je} \quad L' = 0, \quad (6)$$

<sup>3</sup>Impulzi  $p_\mu$ , dobljeni z Lagranževo funkcijo (3), so v resnici impulzi na enoto mase  $m$  !

ki velja, ne glede na to, kakšen  $L'$  smo na začetku izbrali. Zato je smiselno izbrati za  $L'$  konstanto. Če je Lagranževa funkcija  $L'$  konstanta gibanja, je poljubna zvezno odvedljiva funkcija  $L = f(L')$  tudi dobra Lagranževa funkcija [2]. Zato lahko ekvivalentno izberemo za Lagranžovo funkcijo izraz (7)

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu . \quad (7)$$

Z impulzi (4) in Lagranžovo funkcijo (7) dobimo Hamiltonovo funkcijo

$$H = p_\mu \dot{x}^\mu - L = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu . \quad (8)$$

Iz zveze (6) sledi, da je  $H$  konstanta z vrednostmi:

$$H = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{za masne delce} \\ 0 & \text{za fotone} \end{cases} . \quad (9)$$

V dodatku (pog. A.1, str. 49) je za primer Schwarzschildove metrike (2) pokazano, da  $H = -\frac{1}{2}$  ustreza masnim delcem in  $H = 0$  fotonom.

Za Lagranžovo funkcijo  $L$  (en.7) in Hamiltonovo funkcijo  $H$  (en.8) dobimo v primeru Schwarzschildove metrike enačbi:

$$L = \frac{1}{2} \left[ - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \right] \quad (10)$$

$$H = \frac{1}{2} \left[ - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} p_t^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left( p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} p_\varphi^2 \right) \right] . \quad (11)$$

Pri reševanju Hamiltonovih enačb je potrebno poiskati čimveč konstant gibanja. Ena je kar Hamiltonova funkcija z vrednostma  $H = 0$  ali  $-\frac{1}{2}$ , odvisno od delca (en.9). Tiste koordinate, ki ne eksplicitno nastopajo v Lagranževi enačbi, so ciklične, in njihovi impulzi so konstante gibanja. V primeru enačbe (10) sta to koordinati  $t$  in  $\varphi$ . Impulz  $-p_t$  je mirovna energija<sup>4</sup> delca in jo označimo z  $E$ , impulz  $p_\varphi$  pa je projekcija vrtilne količine<sup>5</sup>  $l_z$  na os  $z$ . Koordinati  $r$  in  $\theta$  nista ciklični, zato je njuna impulza nista konstanti gibanja.

V dodatku (pog. A.2, str. 50) je pokazano, da sta tudi ostali dve komponenti vrtilne količine ( $l_x, l_y$ ) konstanti gibanja. Torej je celotna vrtilna količina konstanta gibanja:

$$l^2 = p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} p_\varphi^2 . \quad (12)$$

<sup>4</sup>V resnici je  $p_t = -mc\gamma(1 - \frac{2MG}{c^2 r}) = -\frac{E}{c}$ , ampak se zaradi izbire enot poenostavi v  $-E$ .

<sup>5</sup>Pravilna vrednost je  $l_z = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$ . Ker so vsi impulzi definirani na enoto mase, velja kar  $l_z = p_\varphi$ .

### Enačba orbite

Enačbe gibanja in njihove rešitve so že znane [1, 4], tu jih bom le na kratko povzel.

Enačbe gibanja dobimo iz Hamiltonovih enačb

$$\frac{dA}{d\tau} = [A, H] + \frac{\partial A}{\partial \tau}, \quad (13)$$

kjer je  $A$  nek operator oz. količina,  $H$  pa Hamiltonian. Za Schwarzschildov primer dobimo:

$$\dot{t} = [t, H] = \frac{E}{1 - \frac{2M}{r}} \quad (14)$$

$$\dot{r} = [r, H] = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) p_r. \quad (15)$$

Z upoštevanjem enačbe za  $H$  (en.11) in vrtilno količino  $l$  (en.12) dobimo iz zgornjih dveh enačb enačbo za  $\dot{r}$ :

$$\dot{r}^2 = 2H \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + E^2 - \frac{l^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (16)$$

Enačbi za  $\dot{\theta}$  in  $\dot{\varphi}$  dobimo iz drugih dveh Hamiltonovih enačb:

$$\dot{\theta} = [\theta, H] = \pm \frac{1}{r^2} \sqrt{l^2 - \frac{l_z^2}{\sin^2 \theta}} \quad (17)$$

$$\dot{\varphi} = [\varphi, H] = \frac{l_z}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (18)$$

Ti dve enačbi sta enaki kot pri klasičnem primeru centralne sile, zato se orbite lahko obravnavajo kot ravninske. Enačba ravninske orbite je navadno oblike  $r = r(\varphi)$ , v tem primeru pa je bolje uvesti novo spremenljivko  $\lambda$ , ki meri kot od periastrona. Vrtilna količina naj kaže v smeri normale  $\hat{n}$ , velikost vrtilne količine pa je  $l = \vec{l} \cdot \hat{n}$ .

Komponente vektorja  $\hat{n}$  se izrazijo s krogelnimi koordinatami (slika 3, levo):

$$(n_x, n_y, n_z) = (\sin \varepsilon \sin \Omega, -\sin \varepsilon \cos \Omega, \cos \varepsilon) \quad (19)$$

tako se da velikost vrtilne količine  $l$  izraziti s temi koordinatami in impulzi:

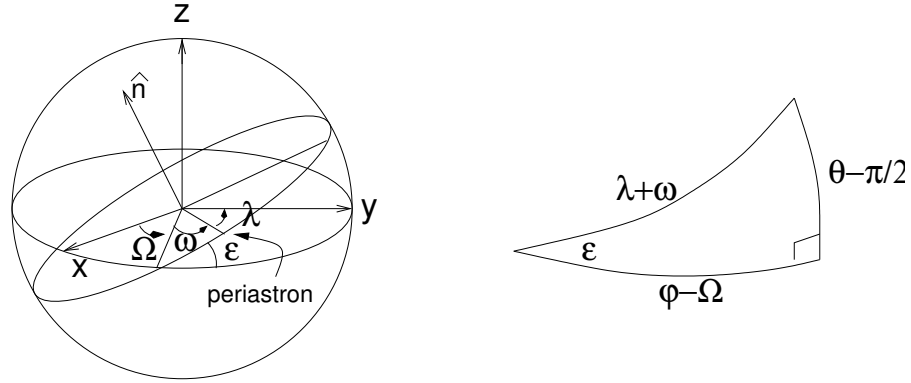
$$l = (-\sin \varepsilon \cot \theta \sin(\varphi - \Omega) + \cos \varepsilon) p_\varphi + \sin \varepsilon \cos(\varphi - \Omega) p_\theta. \quad (20)$$

Zvezo med koti  $\varphi$ ,  $\theta$  in  $\lambda$  dobimo s pomočjo sinusnega in kosinusnega izreka za sferne trikotnike (slika 3, desno):

$$\cos(\lambda + \omega) = \cos(\varphi - \Omega) \sin \theta \quad (21)$$

$$\sin(\lambda - \omega) = -\frac{\cos \theta}{\sin \varepsilon}, \quad (22)$$





**Slika 3:** Ravnina orbite:  $\hat{n}$  je normala,  $\varepsilon$  inklinacija orbite,  $\Omega$  je dolžina vozla,  $\omega$  dolžina periastrona in  $\lambda$  kot, merjen od periastrona naprej.

tako da se spremenljivki  $\varphi$  in  $\theta$  izrazita z novo spremenljivko  $\lambda$ :

$$\cos \theta = -\sin \varepsilon \sin(\lambda + \omega) \quad (23)$$

$$\tan(\varphi - \Omega) = \cos \varepsilon \tan(\lambda + \omega) . \quad (24)$$

Da se pokazati [3], da če veljata enačbi (21) in (22), potem velja:  $[\lambda, l] = 1$ . Tako dobimo za  $\dot{\lambda}$  in  $\dot{r}$

$$\dot{\lambda} = [\lambda, H] = \left[ \lambda, \frac{l^2}{2r^2} \right] = \frac{l}{r^2} \quad (25)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\lambda} \dot{\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{l}{r} \right) . \quad (26)$$

Enačba orbite je zveza med  $r$  in  $\lambda$ , in jo dobimo, ko vstavimo enačbo (26) v enačbo (16):

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{l}{r} \right) = \pm \sqrt{2H \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) + E^2 - \frac{l^2}{r^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)} . \quad (27)$$

Z uvedbo nove spremenljivke  $u = \frac{2M}{r}$ , dobimo enačbo orbite

$$\frac{du}{d\lambda} = \pm \sqrt{a^2 + b(1-u) - u^2(1-u)} , \quad (28)$$

kjer sta konstanti  $a$  in  $b$ :

$$a = \frac{2ME}{l} \quad \text{in} \quad b = \frac{8M^2H}{l^2} . \quad (29)$$

Z vpeljavo polinoma  $P(u)$

$$P(u) = a^2 + b(1-u) - u^2(1-u) \quad (30)$$

se integral enačbe (28) zapiše v obliki:

$$\int d\lambda = \pm \int \frac{du}{\sqrt{P(u)}} . \quad (31)$$

Očitno je, da orbita obstaja le, dokler je  $P(u) \geq 0$ . Kakšne so ničle tega polinoma določa diskriminanta  $D$ :

$$D = \alpha^2 + \beta^3, \quad (32)$$

kjer sta konstanti  $\alpha$  in  $\beta$ :

$$\alpha = 1 - 9b - \frac{27}{2}a^2 \quad (33)$$

$$\beta = -1 - 3b. \quad (34)$$

Z uvedbo dveh novih parametrov

$$\mathcal{D} = (\alpha - \sqrt{D})^{1/3} \quad (35)$$

$$\tilde{\mathcal{D}} = (\alpha + \sqrt{D})^{1/3}, \quad (36)$$

se ničle polinoma (30) zapišejo v obliki:

$$u_1 = \frac{1}{3}(1 + \mathcal{D} + \tilde{\mathcal{D}}) \quad (37)$$

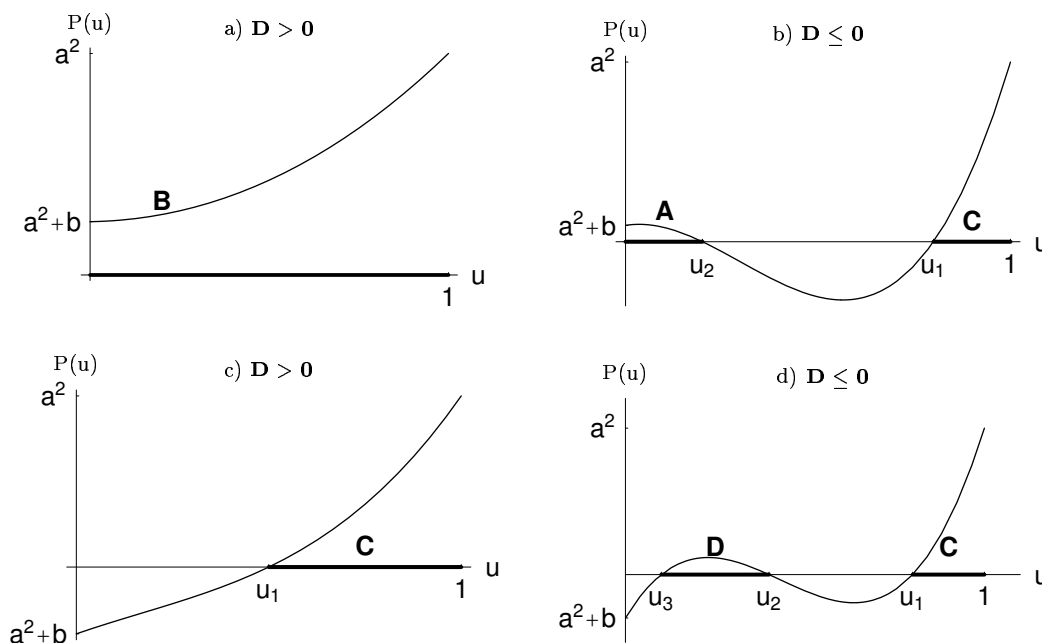
$$u_2 = \frac{1}{3}(1 + \mathcal{D}e^{i\frac{2\pi}{3}} + \tilde{\mathcal{D}}e^{-i\frac{2\pi}{3}}) \quad (38)$$

$$u_3 = \frac{1}{3}(1 + \mathcal{D}e^{i\frac{4\pi}{3}} + \tilde{\mathcal{D}}e^{-i\frac{4\pi}{3}}). \quad (39)$$

Če je  $D < 0$ , sta  $\tilde{\mathcal{D}}$  in  $\mathcal{D}$  konjugirano kompleksna ( $\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D}^*$ ), zaradi česar so vsi trije koreni polinoma  $P(u)$  realni. Če je  $D = 0$ , sta dva ali pa celo vsi trije koreni enaki. Če je  $D > 0$ , sta  $\mathcal{D}$  in  $\tilde{\mathcal{D}}$  realna in sta dve ničli kompleksni ( $u_2$  in  $u_3$ ),  $u_1$  pa ostane realna.

## 2.2 Tipi orbit

Glede na diskriminanto  $D$  in konstanti  $a$  in  $b$ , se da orbite razdeliti na 4 tipe. Pri tem so pomembne ničle na intervalu  $0 \leq u \leq 1$ , ker se delci lahko gibljejo le med  $r = \infty$  in  $r = 2M$ . Na sliki 4 so prikazane možne razporeditve ničel polinoma  $P(u) = a^2 + b(1-u) - u^2(1-u)$  in pripadajoči tipi orbit.



**Slika 4:** Primeri razporeditve ničel polinoma  $P(u)$  na intervalu  $0 \leq u \leq 1$  in ustrezni tipi orbit. Orbite tipa A ustrezajo sipanju s periastronom v  $u_2$ . Orbite tipa B začenejo v neskončnosti in končajo v črni luknji. Orbite tipa C so ujete med apastronom  $u_1$  in črno luknjo. Orbite tipa D so vezane orbite: delci se gibljejo med periastronom  $u_2$  in apastronom  $u_3$ . Stabilne krožne orbite dobimo v primeru D, če je  $u_2 = u_3$ .

Predznak diskriminante  $D$  za različne tipe orbit določimo po naslednjem premisleku:

- Če je  $u > 1$ , potem je  $P(u) > 0$ , ker je  $b \leq 0$ .<sup>6</sup> To pomeni, da  $P(u)$  nima nobene ničle večje od 1. Da bo to res, morajo biti vse realne ničle negativne. Ker je  $u_1 + u_2 + u_3 = 1$ , je to možno le, če je ena ničla (npr.  $u_1$ ) realna in negativna, ostali dve pa sta konjugirano kompleksni. Torej je  $D > 0$ .
- Dve ničli sta realni, torej mora biti realna tudi tretja. Zaradi tega je  $D < 0$ .
- Edina realna ničla je  $u_1$ . Podobno kot v primeru a, je tudi tu  $D > 0$ .
- Vse tri ničle so realne, zato je  $D < 0$ .

<sup>6</sup>Ker je  $b < 0$  za masne delce in  $b = 0$  za fotone, je vedno  $b \leq 0$ .

Enačbe (32, 33, 34) se poenostavijo za fotone, če upoštevamo, da je  $H = b = 0$ :

$$\alpha = 1 - \frac{27}{2}a^2 \quad (40)$$

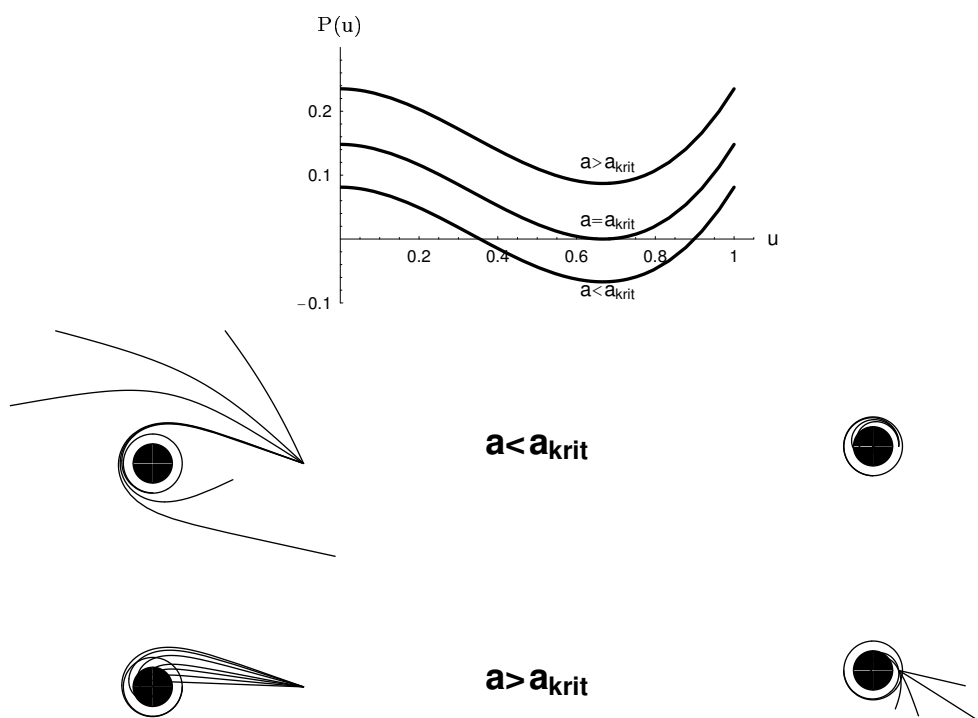
$$\beta = -1 \quad (41)$$

$$D = 27a^2 \left( \frac{27}{4}a^2 - 1 \right). \quad (42)$$

Poleg tega, ker je  $b = 0$ , primera c in d (slika 4, c in d) ne obstajata, diskriminanta (42) pa spremeni predznak pri

$$a_{krit} = \frac{2}{3\sqrt{3}}. \quad (43)$$

Za  $a > a_{krit}$  je  $D > 0$  in so orbite tipa B (direktne orbite). Za  $a < a_{krit}$  je  $D < 0$ , orbite so tipa A (sipanje). Če je  $a = a_{krit}$  so orbite kritične, kar pomeni, da fotoni, ko se približajo črni luknji, začnejo krožiti okoli nje na razdalji  $r_{krit} = 3M$ . Primeri polinoma  $P(u)$  in orbit so na sliki 5.



**Slika 5:** Polinom  $P(u)$  za fotone (levo) in orbite fotonov (desno) pri različnih vrednostih parametra  $a$ . Fotoni tipa A ( $a < a_{krit}$ ) uidejo črni luknji, če so izsevani na razdalji  $r > 3M$ . Fotoni tipa B ( $a > a_{krit}$ ) uidejo črni luknji, če so že na začetku usmerjeni proč od nje. V primeru  $a = a_{krit}$  (kritična orbita) se orbita začne navijati okoli črne luknje na razdalji  $r = 3M$ .

## 2.3 Analitična rešitev enačbe orbite

Rešitev enačbe orbite (31), ki je zapisana v tem podpoglavju, je veljavna za delce z maso, kakor za fotone.

### 2.3.1 Tip A

Ker je v tem primeru diskriminanta  $D \leq 0$ , so vsi trije koreni (37, 38, 39) realni in jih zapišemo v obliki:

$$u_1 = \frac{1}{3} \left( 1 + 2|\mathcal{D}| \cos \frac{\psi}{3} \right) \quad (44)$$

$$u_2 = \frac{1}{3} \left( 1 + 2|\mathcal{D}| \cos \frac{\psi + 2\pi}{3} \right) \quad (45)$$

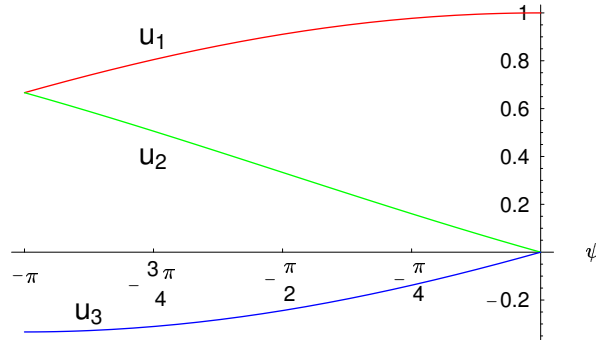
$$u_3 = \frac{1}{3} \left( 1 + 2|\mathcal{D}| \cos \frac{\psi - 2\pi}{3} \right), \quad (46)$$

kjer je

$$|\mathcal{D}| = \sqrt{-\beta} \quad (47)$$

$$\psi = 2 \arctan \left( -\frac{\sqrt{-D}}{\alpha + \sqrt{-\beta^3}} \right) = -2 \arcsin \frac{a}{a_{krit}}. \quad (48)$$

Ker je  $D < 0$ , je  $|\alpha| < \sqrt{-\beta^3}$ . Zaradi tega je argument v  $\arctan$  (48) negativen, kar pomeni, da je  $\psi \in [-\pi, 0]$ . Na sliki 6 so prikazane ničle polinoma (30) na intervalu  $\psi \in [-\pi, 0]$ .



**Slika 6:** Ničle  $u_1, u_2$  in  $u_3$  polinoma  $P(u)$  na intervalu  $\psi \in [-\pi, 0]$ .

Z uporabo substitucije [4]

$$u = u_3 + (u_2 - u_3) \sin^2 \chi, \quad (49)$$

se integral (31) prevede na eliptični integral 1. vrste z rešitvijo:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_i = \pm 2n [F(\chi|m) - F(\chi_i|m)], \quad (50)$$

kjer sta konstanti  $m$  in  $n$ :

$$n = \frac{1}{\sqrt{u_1 - u_3}} \quad (51)$$

$$m = \frac{u_2 - u_3}{u_1 - u_3} . \quad (52)$$

To je že enačba orbite. Potrebno jo je samo obrniti, da postane oblike  $u = u(\lambda)$ . Z upoštevanjem enačbe (49) in identitete [5]:

$$\cos \chi = \operatorname{cn}(F(\chi|m)|m) \quad (53)$$

se enačba orbite končno zapiše:

$$u = u_2 - (u_2 - u_3) \operatorname{cn}^2\left(F(\chi_i|m) \pm \frac{\Delta\lambda}{2n}|m\right) . \quad (54)$$

**D = 0**

Poseben primer zgornje rešitve je kritična orbita. V tem primeru je  $u_1 = u_2$ ,  $\psi = -\pi$  in  $m = 1$ . Integral (31) se poenostavi, enačba kritične orbite pa je:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_i = \pm 2n [\operatorname{ArcTanh}(\sin \chi) - \operatorname{ArcTanh}(\sin \chi_i)] \quad (55)$$

oziroma:

$$u = u_3 + (u_2 - u_3) \operatorname{Tanh}^2\left(\operatorname{ArcTanh}(\sin \chi_i) \pm \frac{\Delta\lambda}{2n}\right) . \quad (56)$$

### 2.3.2 Tip B

V tem primeru je diskriminanta  $D > 0$  in edini realni koren je

$$u_1 = \frac{1}{3}(1 + \mathcal{D} + \tilde{\mathcal{D}}) . \quad (57)$$

Tokrat uporabimo substitucijo [4]:

$$u = u_1 + \sqrt{u_1^2 + pu_1 + q} \tan^2 \frac{\chi}{2} , \quad (58)$$

kjer sta konstanti  $p$  in  $q$ :

$$p = u_1 - 1 \quad (59)$$

$$q = -b + pu_1 . \quad (60)$$

Spet dobimo eliptični integral 1. vrste, z rešitvijo:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_i = \pm n [F(\chi|m) - F(\chi_i|m)] , \quad (61)$$

kjer sta  $m$  in  $n$ :

$$n = (u_1^2 + pu_1 + q)^{-1/4} \quad (62)$$

$$m = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{u_1 + \frac{p}{2}}{\sqrt{u_1^2 + pu_1 + q}} \right). \quad (63)$$

S pomočjo enačb (58) in (53), dobimo enačbo orbite:

$$u = u_1 + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1 - \operatorname{cn}\left(F(\chi_i|m) \pm \frac{\Delta\lambda}{n}\right)}{1 + \operatorname{cn}\left(F(\chi_i|m) \pm \frac{\Delta\lambda}{n}\right)}. \quad (64)$$

### 3 Povezava dveh točk s svetlobno geodetko

Da bi ugotovili, kako se širi svetloba v okolici črne luknje, je potrebno povezati začetno točko  $(t_i, r_i, \theta_i, \varphi_i)$  in končno točko  $(t_f, r_f, \theta_f, \varphi_f)$  s svetlobno geodetko. Pri tem rešujemo posebej kotni, radialni in časovni del. Pri radialnem delu je najpomembnejše določiti tip orbite (A ali B) in pravilno vrednost parametra  $a$ . Rešitev v [4, 1] je dobra le v primeru, da je ena od točk v neskončnosti. Tu sem poiskal rešitev za dve poljubni točki.

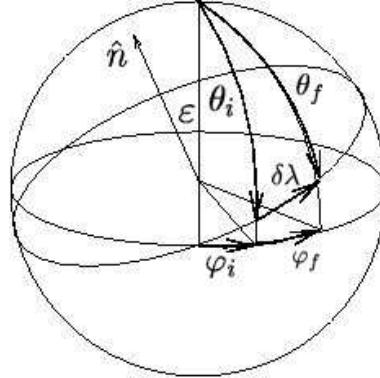
Rešitev časovnega dela pa omogoča določanje lege fotona ob določenem času. V [1] je časovna integracija izvedena numerično in je precej počasna. Poiskal sem analitične rešitve za časovno integracijo in s tem pospešil algoritme za določanje lege fotona ob določenem času.

#### 3.1 Kotni del

Poznamo začetno točko s smerjo  $\hat{e}_i$  in končno točko s smerjo  $\hat{e}_f$  (slika 7) :

$$\hat{e}_i = \hat{e}_x \sin \theta_i \cos \varphi_i + \hat{e}_y \sin \theta_i \sin \varphi_i + \hat{e}_z \cos \theta_i \quad (65)$$

$$\hat{e}_f = \hat{e}_x \sin \theta_f \cos \varphi_f + \hat{e}_y \sin \theta_f \sin \varphi_f + \hat{e}_z \cos \theta_f . \quad (66)$$



**Slika 7:** Kota  $\varepsilon$  in  $\delta\lambda$  med začetno in končno točko.

Normalo na ravnino orbite izrazimo z vektorji  $\hat{e}_i$  in  $\hat{e}_f$  s pomočjo sinusnega izreka

$$\hat{n} = \frac{\hat{e}_i \times \hat{e}_f}{\sin \delta\lambda} , \quad (67)$$

tako da dobimo za kot  $\varepsilon$  izraz:

$$\cos \varepsilon = \hat{n} \cdot \hat{e}_z = \frac{\sin \theta_i \sin \theta_f \sin(\varphi_f - \varphi_i)}{\sin \delta\lambda} . \quad (68)$$

Iz kosinusnega izreka za sferne trikotnike (slika 7) dobimo še izraz za kot  $\delta\lambda$ :

$$\cos \delta\lambda = \cos \theta_i \cos \theta_f + \sin \theta_i \sin \theta_f \cos(\varphi_f - \varphi_i) . \quad (69)$$

Kot  $\delta\lambda$  iz enačbe (69) je določen do mnogokratnika  $2\pi$ , torej je  $\Delta\lambda$  enak:

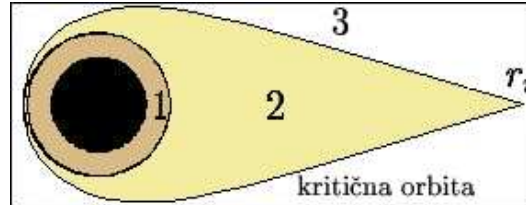
$$\Delta\lambda = \delta\lambda + 2\pi k , k = 0, 1, 2, 3, \dots , \quad (70)$$

kjer  $k$  šteje število navojev orbite okoli črne luknje.



### 3.2 Radialni del

Najprej je potrebno določiti tip orbite: ali je  $a > a_{krit}$  ali pa  $a < a_{krit}$ . Če si izberemo neko začetno točko  $(r_i, \lambda_i)$ , potem kritična orbita (en.56) razdeli ravnino na tri področja (slika 8).



**Slika 8:** Tipi orbit: če je končna točka  $(r_f, \lambda_f)$  v področju 1, vodijo do nje iz točke  $(r_i, \lambda_i)$  orbite tipa B, za katere je  $a > a_{krit}$ . Če je  $(r_f, \lambda_f)$  v področju 3, vodijo do nje orbite tipa A, za katere je  $a < a_{krit}$ . Če je  $(r_f, \lambda_f)$  v področju 2, vodijo do nje orbite tipa B za  $k = 0$  in tipa A za  $k > 0$ .

Če je končna točka v področju 3, potem vodijo do nje iz začetne točke orbite tipa A, enačba orbite pa je (54). Če je končna točka v področju 1, vodijo do nje orbite tipa B, enačba orbite pa je (64). Če je končna točka v področju 2, vodijo do nje orbite tipa B za  $k = 0$  v enačbi (70), za  $k > 0$  pa orbite tipa A.

Naslednji korak je, poiskati tako vrednost parametra  $a$ , da rešitev enačbe orbite zadošča pogojema  $u(\lambda_i|a) = u_i$  in  $u(\lambda_f|a) = u_f$ .

#### 3.2.1 Tip A

Enačba orbite (54) v začetni točki  $(u_i, \Delta\lambda = 0)$  je:

$$\frac{u_2 - u_i}{u_2 - u_3} = \text{cn}^2(F(\chi_i|m)|m) \quad (71)$$

in v končni točki  $(u_f, \Delta\lambda)$ :

$$\frac{u_2 - u_f}{u_2 - u_3} = \text{cn}^2\left(F(\chi_i|m) \pm \frac{\Delta\lambda}{2n} \middle| m\right). \quad (72)$$

To je sistem dveh enačb z dvema neznankama  $\chi_i$  in  $a$ .<sup>7</sup> S substitucijami [6]

$$v = F(\chi_i|m) \pm \frac{\Delta\lambda}{n} \quad (73)$$

$$z = F(\chi_i|m) \quad (74)$$

$$v - z = \pm \frac{\Delta\lambda}{n} \quad (75)$$

se znebimo spremenljivke  $\chi_i$  in dobimo nelinearno enačbo za parameter  $a$ :

$$\text{cn}(v - z|m) = \frac{\text{cn}(v|m)\text{cn}(z|m) + \text{sn}(v|m)\text{sn}(z|m)\text{dn}(v|m)\text{dn}(z|m)}{1 - m\text{sn}^2(v|m)\text{sn}^2(z|m)}. \quad (76)$$

<sup>7</sup>Parameter  $a$  pride v sistem s parametri  $u_1, u_2, u_3, m$  in  $n$ .

Z upoštevanjem enačb (71)-(75), dobimo zveze, ki jih uporabimo v enačbi (76):

$$\operatorname{cn}^2(v|m) = \frac{u_2 - u_f}{u_2 - u_3} \quad (77)$$

$$\operatorname{sn}^2(v|m) = \frac{u_f - u_3}{u_2 - u_3} \quad (78)$$

$$\operatorname{dn}^2(v|m) = \frac{u_1 - u_f}{u_1 - u_3} \quad (79)$$

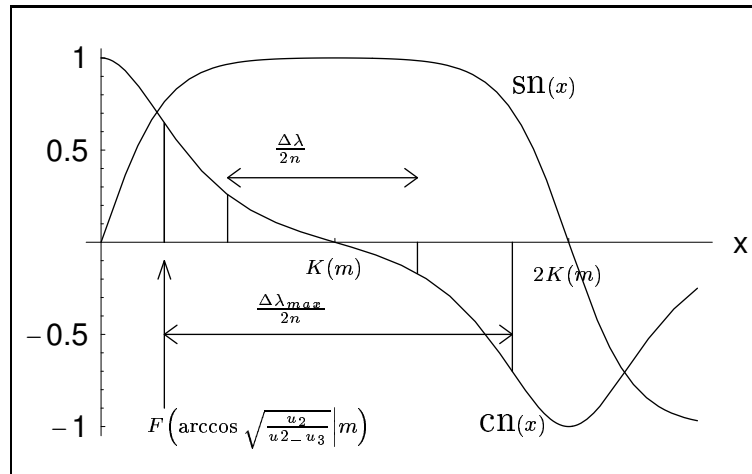
$$\operatorname{cn}^2(z|m) = \frac{u_2 - u_i}{u_2 - u_3} \quad (80)$$

$$\operatorname{sn}^2(z|m) = \frac{u_i - u_3}{u_2 - u_3} \quad (81)$$

$$\operatorname{dn}^2(z|m) = \frac{u_1 - u_i}{u_1 - u_3} \quad (82)$$

Ker enačba (76) vsebuje Jacobijeve funkcije  $\operatorname{cn}$ ,  $\operatorname{sn}$  in  $\operatorname{dn}$ , ki so periodične s periodo  $4K(m)$ , je potrebno ugotoviti, na kateri periodi leži rešitev, preden začnemo enačbo reševati numerično.

V enačbi (76) nastopajo koreni zgornjih funkcij, torej imamo dve možnosti za predznak funkcij  $\operatorname{cn}$  in  $\operatorname{sn}$ .<sup>8</sup> Predznak določimo s pomočjo slike 9, kjer sta prikazani funkciji  $\operatorname{sn}(x|m)$  in  $\operatorname{cn}(x|m)$ . Označeni sta tudi točki, ki označujeta najmanjšo in največjo možno vrednost argumenta za obe funkciji ( $\arg_{\min} = F[\arccos \sqrt{\frac{u_2}{u_2 - u_3}}|m]$  in  $\arg_{\max} = 2K(m) - F[\arccos \sqrt{\frac{u_2}{u_2 - u_3}}|m]$ ). Te vrednosti dobimo, če pošljemo foton iz neskončnosti ( $u_i = 0$ ) v neskončnost ( $u_f = 0$ ).



**Slika 9:** Funkciji  $\operatorname{cn}(x|m)$  in  $\operatorname{sn}(x|m)$ .

Če foton ne začne v neskončnosti ( $u_i \neq 0$ ), je argument  $\arg_i$  v začetni točki  $\arg_{\min} < \arg_i < K(m)$ , zato je vrednost funkcije  $\operatorname{cn}(z|m)$  v enačbi (76) vedno pozitivna. Končna točka pa je odvisna tudi od kota  $\Delta\lambda$ , zato ima lahko argument

<sup>8</sup>Funkcija  $\operatorname{dn}$  je vedno pozitivna, saj je  $\operatorname{dn}^2(x|m) = 1 - m\operatorname{sn}^2(x|m)$  in  $m < 1$ .

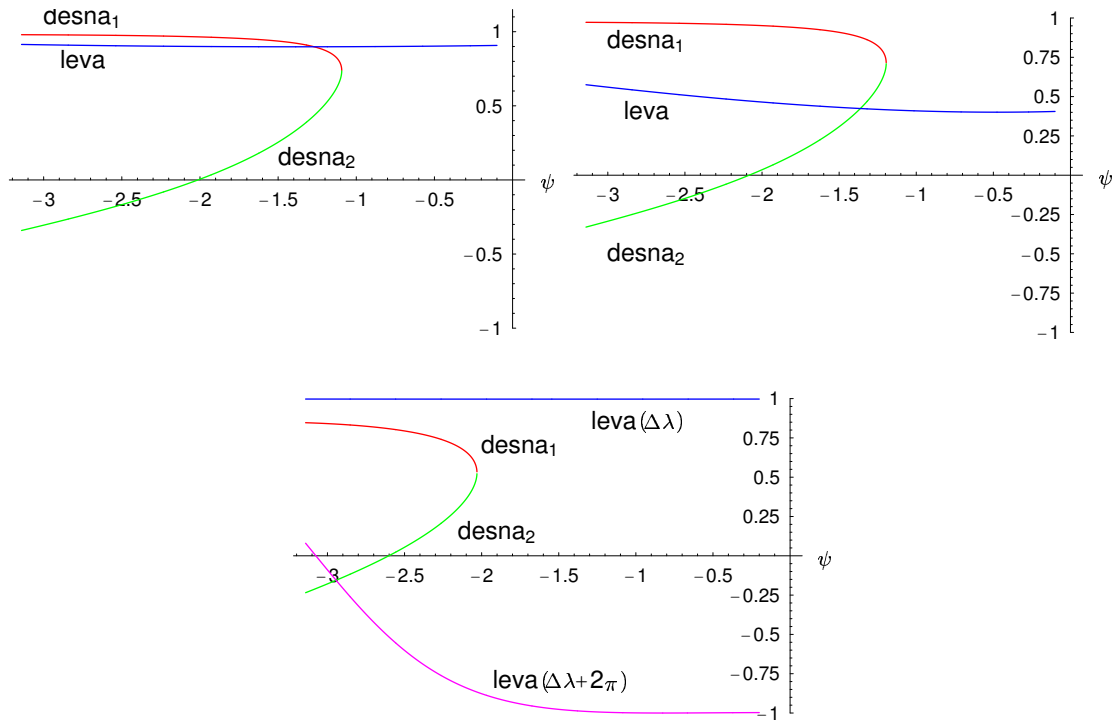
$arg_f$  v končni točki vrednosti  $arg_i < arg_f < arg_{max}$ .<sup>9</sup> To pa pomeni, da lahko pri dovolj velikem  $\Delta\lambda$  funkcija  $cn(v|m)$  spremeni predznak. Funkcija  $sn$  je na celotnem intervalu  $[arg_{min}, arg_{max}]$  pozitivna, tako da funkciji  $sn(z|m)$  in  $sn(v|m)$  ne spremenita predznaka.

Torej je potrebno paziti na predznak korena samo v enačbi (77). S tem dobimo dve različni desni strani enačbe (76):

$$desna_1 = \frac{cn(v|m)cn(z|m) + sn(v|m)sn(z|m)dn(v|m)dn(z|m)}{1 - msn^2(v|m)sn^2(z|m)} \quad (83)$$

$$desna_2 = \frac{-cn(v|m)cn(z|m) + sn(v|m)sn(z|m)dn(v|m)dn(z|m)}{1 - msn^2(v|m)sn^2(z|m)}. \quad (84)$$

Vse tri enačbe so prikazane na sliki 10.

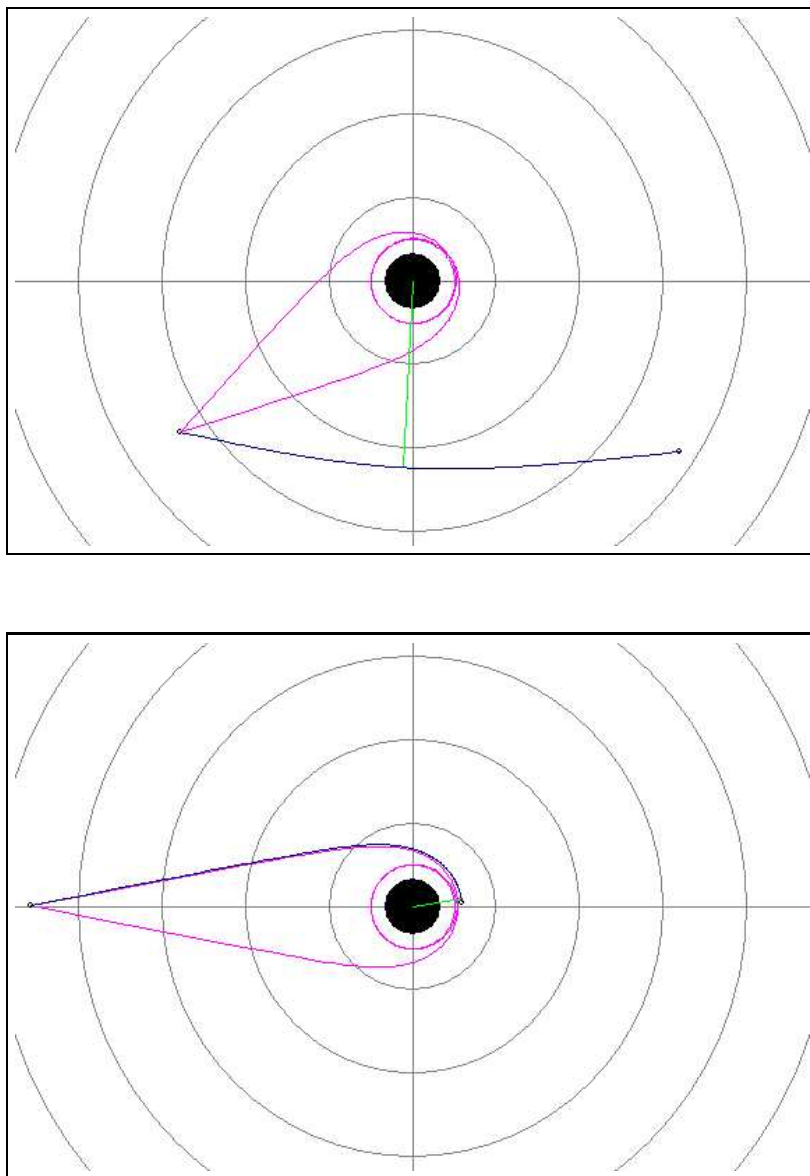


**Slika 10:** Leva stran enačbe (76) (modro) in obe različni desni strani: enačba (83) je rdeče barve, enačba (84) pa zelene. Z vijolično barvo je narisana leva stran (76) pri kotu  $\Delta\lambda + 2\pi$ , torej za orbite, ki se enkrat navijejo okoli črne luknje. V primeru iz prve slike uporabimo v enačbi (76) enačbo (83), v primeru iz druge slike pa (84). Na tretji sliki je primer orbite tipa A, ki ima rešitev le, če se orbita vsaj enkrat navije okoli črne luknje.

V primeru na sliki 10a uporabimo za iskanje parametra  $a$  na desni strani enačbe (76) enačbo (83), v drugem primeru (slika 10b) pa uporabimo enačbo (84). V tretjem primeru (slika 10c) pa se dveh točk ne da povezati z direktno orbito tipa A; edina direktna orbita je tipa B. Če bi hoteli ti dve točki povezati z orbito tipa A, bi se morala vsaj enkrat naviti okoli črne luknje (območje 2 na sliki 8).

<sup>9</sup>Tu sem privzel, da se foton na začetku giblje proti črni luknji in ne proč od nje.

Enačbo (76) sem reševal z Brentovo metodo, ki je opisana v literaturi [7]. Dva primera tako dobljenih orbit sta na sliki 11.



**Slika 11:** Primer orbite tipa A med dvema točkama. Črna luknja je črne barve, kritična orbita vijolične, geodetka med dvema točkama pa modre.

### 3.2.2 Tip B

Podobno kakor v primeru orbit tipa A, poiščemo enačbo orbite tipa B (64) v začetni točki  $(u_i, \Delta\lambda = 0)$ :

$$\frac{1 - n^2(u_i - u_1)}{1 + n^2(u_i - u_1)} = \operatorname{cn}(F(\chi_i|m)|m) \quad (85)$$

in za končno točko  $(u_f, \Delta\lambda)$ :

$$\frac{1 - n^2(u_f - u_1)}{1 + n^2(u_f - u_1)} = \operatorname{cn}\left(F(\chi_i|m) \pm \frac{\Delta\lambda}{n} |m\right). \quad (86)$$

Kakor v prejšnem primeru, uvedemo nove spremenljivke [4]

$$v = F(\chi_i|m) \pm \frac{\Delta\lambda}{n} \quad (87)$$

$$z = F(\chi_i|m) \quad (88)$$

$$v - z = \pm \frac{\Delta\lambda}{n} \quad (89)$$

in z adicijskim izrekom [6] dobimo nelinearno enačbo za parameter  $a$ :

$$\operatorname{cn}(v - z|m) = \frac{\operatorname{cn}(v|m)\operatorname{cn}(z|m) + \operatorname{sn}(v|m)\operatorname{sn}(z|m)\operatorname{dn}(v|m)\operatorname{dn}(z|m)}{1 - m\operatorname{sn}^2(v|m)\operatorname{sn}^2(z|m)}. \quad (90)$$

Z upoštevanjem enačb (85)-(89), dobimo zveze, ki jih uporabimo v enačbi (90):

$$\operatorname{cn}(v|m) = \frac{1 - n^2(u_f - u_1)}{1 + n^2(u_f - u_1)} \quad (91)$$

$$\operatorname{sn}^2(v|m) = \frac{4n^2(u_f - u_1)}{(1 + n^2(u_f - u_1))^2} \quad (92)$$

$$\operatorname{dn}^2(v|m) = 1 - \frac{4mn^2(u_f - u_1)}{(1 + n^2(u_f - u_1))^2} \quad (93)$$

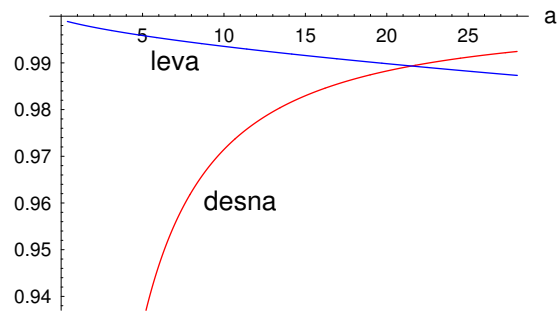
$$\operatorname{cn}(z|m) = \frac{1 - n^2(u_i - u_1)}{1 + n^2(u_i - u_1)} \quad (94)$$

$$\operatorname{sn}^2(z|m) = \frac{4n^2(u_i - u_1)}{(1 + n^2(u_i - u_1))^2} \quad (95)$$

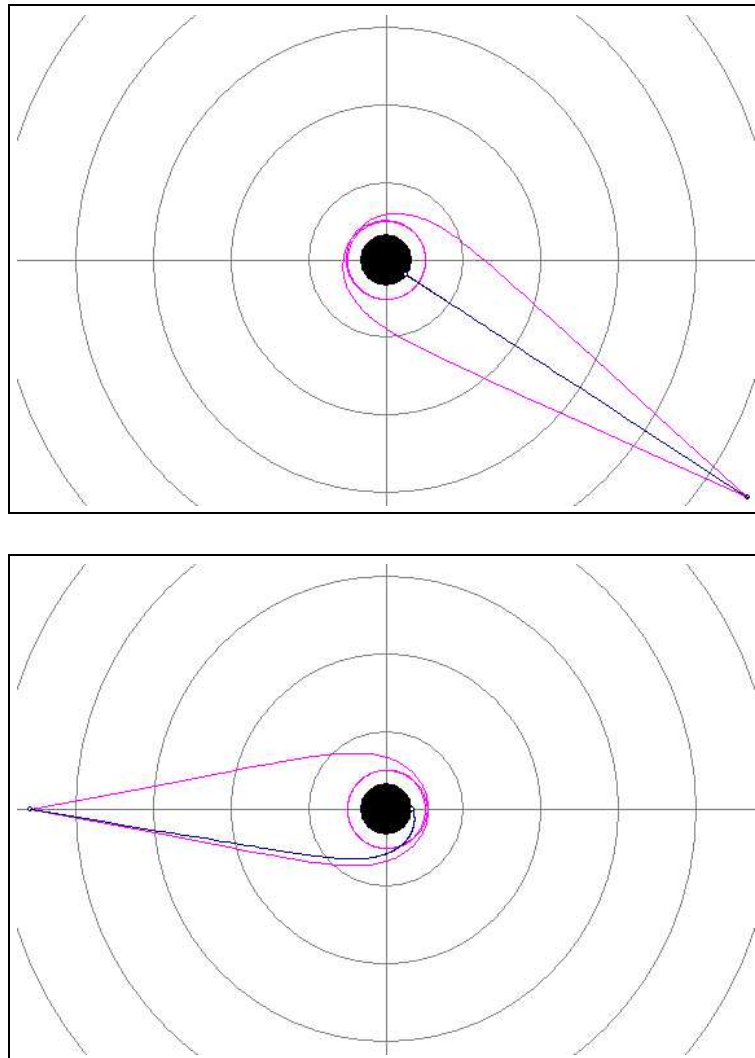
$$\operatorname{dn}^2(z|m) = 1 - \frac{4mn^2(u_i - u_1)}{(1 + n^2(u_i - u_1))^2}. \quad (96)$$

V primeru orbit tipa B ni dveh različnih desnih strani enačbe (90). Zato ni obračalnih točk (slika 12) kakor v primeru orbit tipa A in je v tem primeru lažje določiti parameter  $a$ .

Enačba (90) je rešena numerično z Brentovo metodo [7], dva primera tako dobljene orbite pa sta na sliki 13.



**Slika 12:** Leva in desna stran enačbe (90). Ker ni obračlanih točk kakor na sliki 10, je parameter  $a$  lažje določiti.



**Slika 13:** Primer orbite tipa B med dvema točkama. Črna luknja je črne barve, kritična orbita vijolične, geodetka med dvema točkama pa modre.

### 3.3 Časovni del

Da bi določili čas potovanja fotona od začetne do končne točke, združimo enačbi (14) in (16):

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{\dot{r}^2}{\dot{t}^2} = \left(1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{2M}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \quad (97)$$

oziroma

$$\Delta t = t_f - t_i = \pm 2Ma \int_{u_i}^{u_f} \frac{du}{u^2(1-u)\sqrt{a^2 - u^2(1-u)}}. \quad (98)$$

Zgornji integral rešimo posebej za tip A in tip B.

#### 3.3.1 Tip A

Do rešitve za tip A je najlažje priti s pomočjo programskega paketa Mathematica. Rešitev, dobljena z Mathematico, je izražena z ničlami polinoma pod korenem v zgornji enačbi. To so iste ničle kot v (44, 45, 46), potrebno je samo ugotoviti katera od ničel v Mathematici ustreza  $u_1$ ,  $u_2$  in  $u_3$ .

Nedoločeni integral enačbe (98), kot ga izračuna Mathematica, je kompleksen. Imaginarni del je konstanten in se bo odštel, ko vstavimo meje v (98). Zato lahko že nedoločeni integral popravimo tako, da bo realen.

Ker se fotoni tipa A lahko gibljejo le od periastrona do neskončnosti ( $0 < u < u_2$ ), se rešitev še dodatno poenostavi. Za čas dobimo enačbo:

$$\begin{aligned} t(u, a) = & -2\sqrt{\frac{(u-u_1)(u-u_3)}{(u-u_2)(u_1-u_3)}} \left( u_3(a^2 + u^2(u-1))(1-u_3)\sqrt{\frac{(u-u_2)(u_1-u_3)}{(u-u_1)(u-u_3)}} + \right. \\ & + u \left( (a^2(u-1) + u_1u_3(u_3-1)u - u_2(a^2 + u_1u_3^2))E(\phi|m') - \right. \\ & \left. \left. - (u_1u_3(u_3(u-u_2) - u))F(\phi|m') - a^2 \right) + \right. \\ & \left. + 2a^2u(u-u_2) \left( (1-u_3)\Pi\left(1 - \frac{u_2}{u_3}, \phi|m'\right) + u_3\Pi\left(\frac{u_3-u_2}{u_3-1}, \phi|m'\right) \right) \right) / \\ & \left( au\sqrt{a^2 + u^2u_3(u_3-1)(u-1)} \right), \quad (99) \end{aligned}$$

kjer so  $u_1$ ,  $u_2$  in  $u_3$  podani z enačbami (44, 45, 46), ostali parametri pa so:

$$\phi = \arcsin \sqrt{\frac{u-u_2}{u_3-u_2}} \quad (100)$$

$$m' = \frac{\sin \frac{\psi}{3}}{\sin \frac{\psi+\pi}{3}}, \quad (101)$$

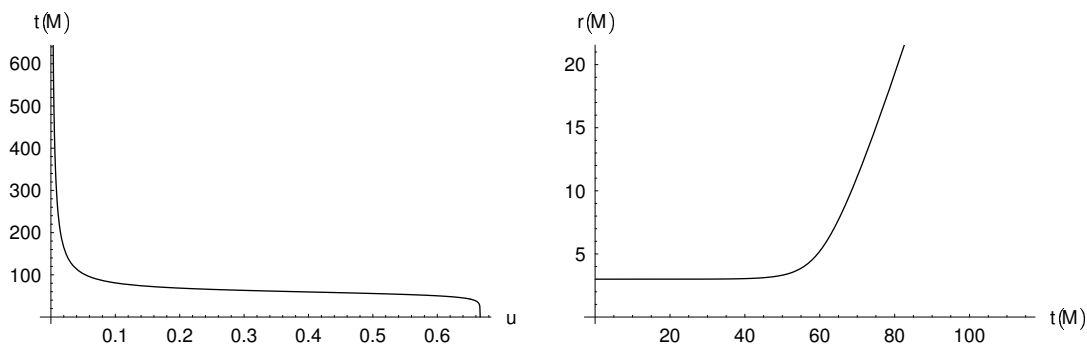
funkcije  $F(\phi|m')$ ,  $E(\phi|m')$  in  $\Pi(n', \phi|m')$  pa so eliptični integrali prve, druge in tretje vrste:

$$F(\phi|m) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1 - m \sin^2 \phi}} d\phi \quad (102)$$

$$E(\phi|m) = \int_0^\phi \sqrt{1 - m \sin^2 \phi} d\phi \quad (103)$$

$$\Pi(n, \phi|m) = \int_0^\phi \frac{1}{(1 - n \sin^2 \phi) \sqrt{1 - m \sin^2 \phi}} d\phi . \quad (104)$$

Pričakovati je, da bo foton, ki ima parameter  $a$  zelo blizu kritičnega, nekaj časa krožil okoli črne luknje, preden se začne oddaljevati od nje. Na dovolj veliki razdalji od črne luknje pa bo orbita kar premica, zato tam čas narašča enakomerno ( $t \rightarrow \frac{r}{c}$ ).



**Slika 14:** Levo: Graf (99)  $t = t(u)$  pri  $a = a_{krit} - 10^{-10}$ . Na abscisi je  $u = \frac{2M}{r}$ , in gre lahko največ do periastrona  $u_2$  (ki je v tem primeru skoraj enak kritičnemu, t.j.  $2/3$ ); na ordinati pa je čas  $t$  v enotah  $M$ . Desno: Graf  $r = r(t)$  v enotah  $M$  pri  $a = a_{krit} - 10^{-10}$ .

Graf (slika 14 levo) pikazuje odvisnost časa od razdalje ( $t = t(u)$ ) (en. 99) pri  $a$ , ki je zelo blizu  $a_{krit}$ . Prikazan je tudi graf  $r = r(t)$  (slika 14 desno). Tu se vidi, da foton precej časa kroži na kritični razdalji  $r = 3M$  preden se začne oddaljevati.

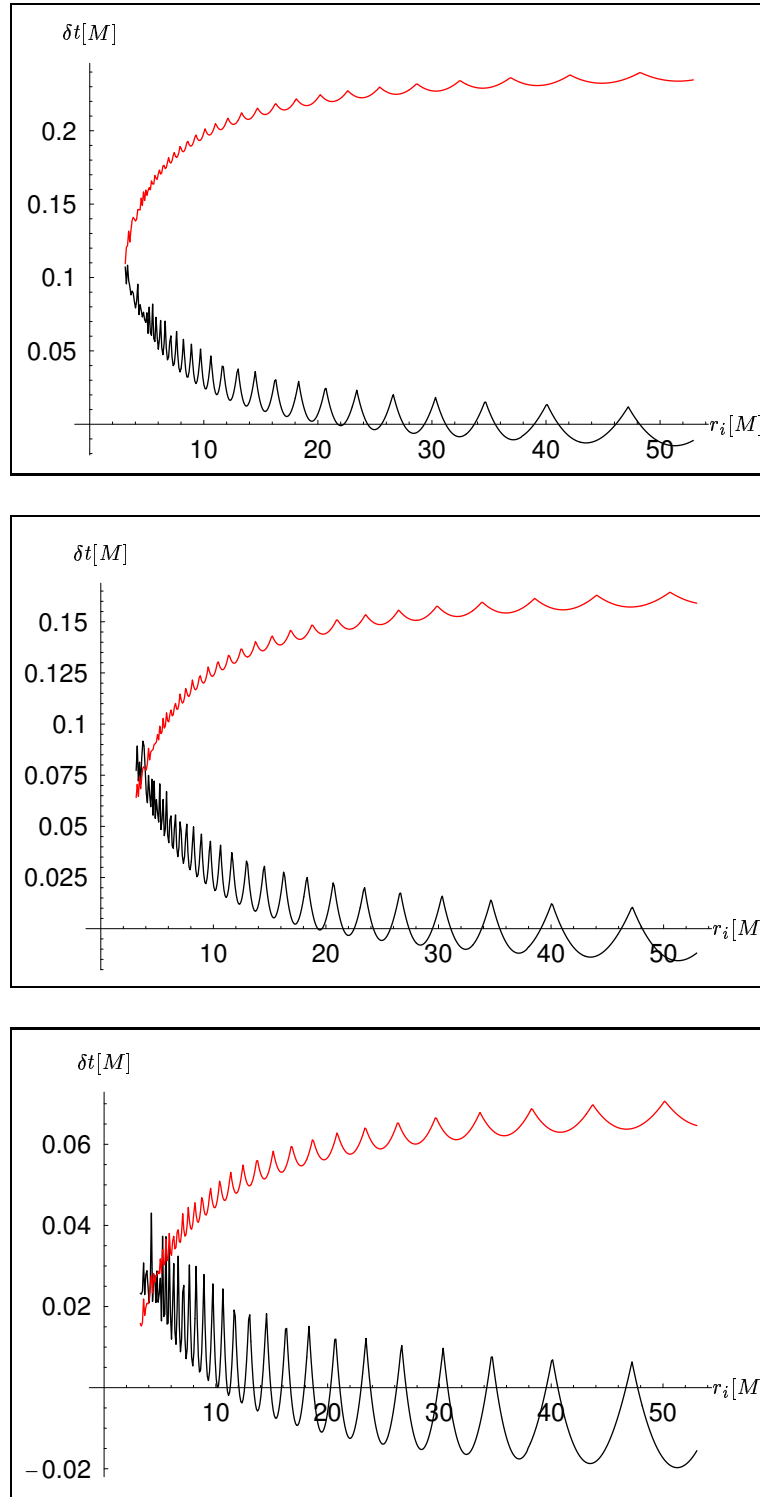
### Primerjava z numerično metodo

Primerjal sem z metodo Runge-Kutta četrtega reda s prilagodljivim korakom. Kako je numerična integracija izvedena, je opisano v [1].

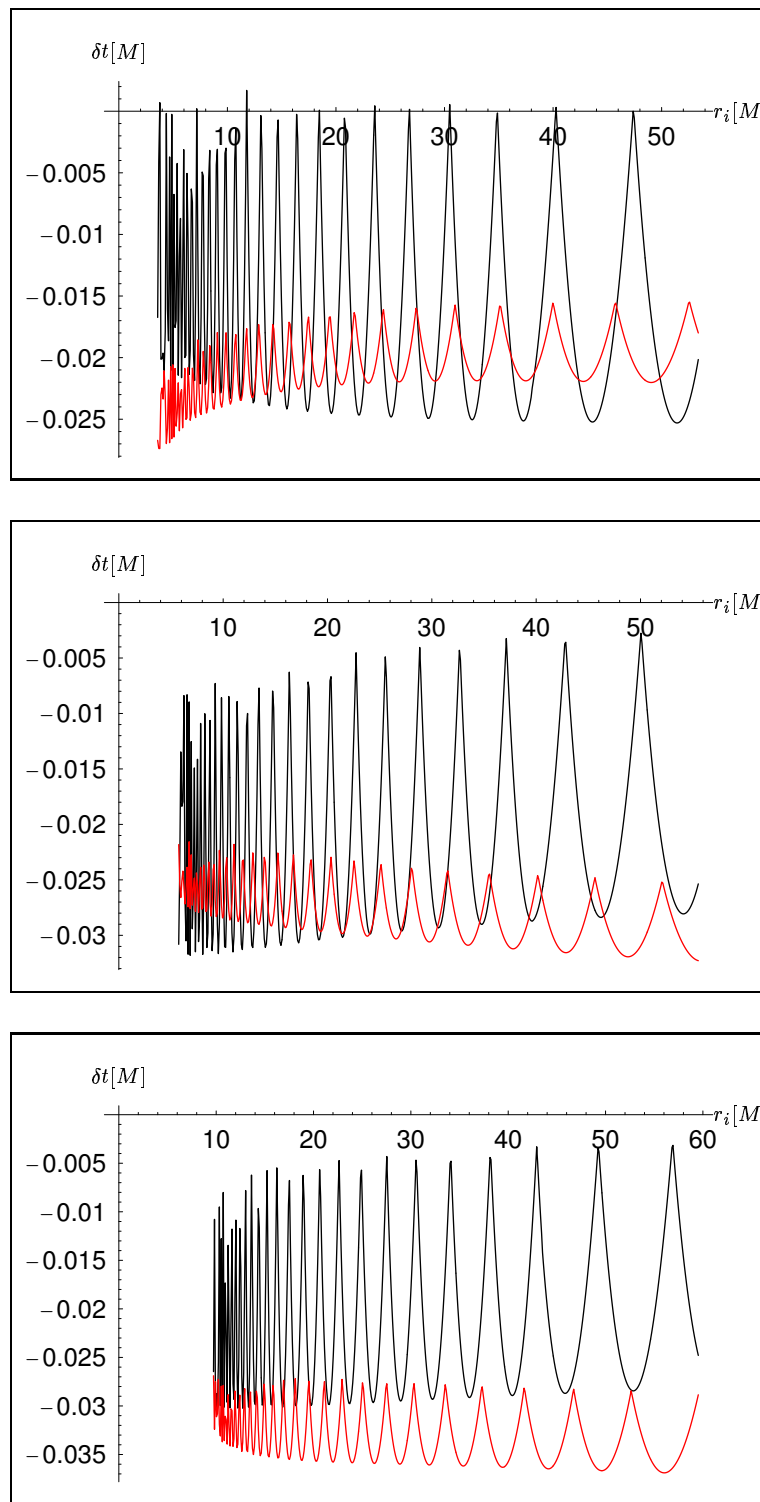
Na grafih na slikah 15, 16 in 17 je prikazana razlika med analitično rešitvijo (99) in numerično integracijo [1] za različne vrednosti parametra  $a$ . Na vseh grafih je končna točka enaka  $r_f = 5000M$ , začetna  $r_i$  pa gre od periastrona  $r_{peri} < r_i < r_{peri} + 50M$ .

V tabeli 1 (str.40) je primerjava časov potrebnih za izračun časa potovanja fotonov po obeh metodah s programskim jezikom Delphi. Algoritmi za izračun eliptičnih integralov so v literaturi [7].

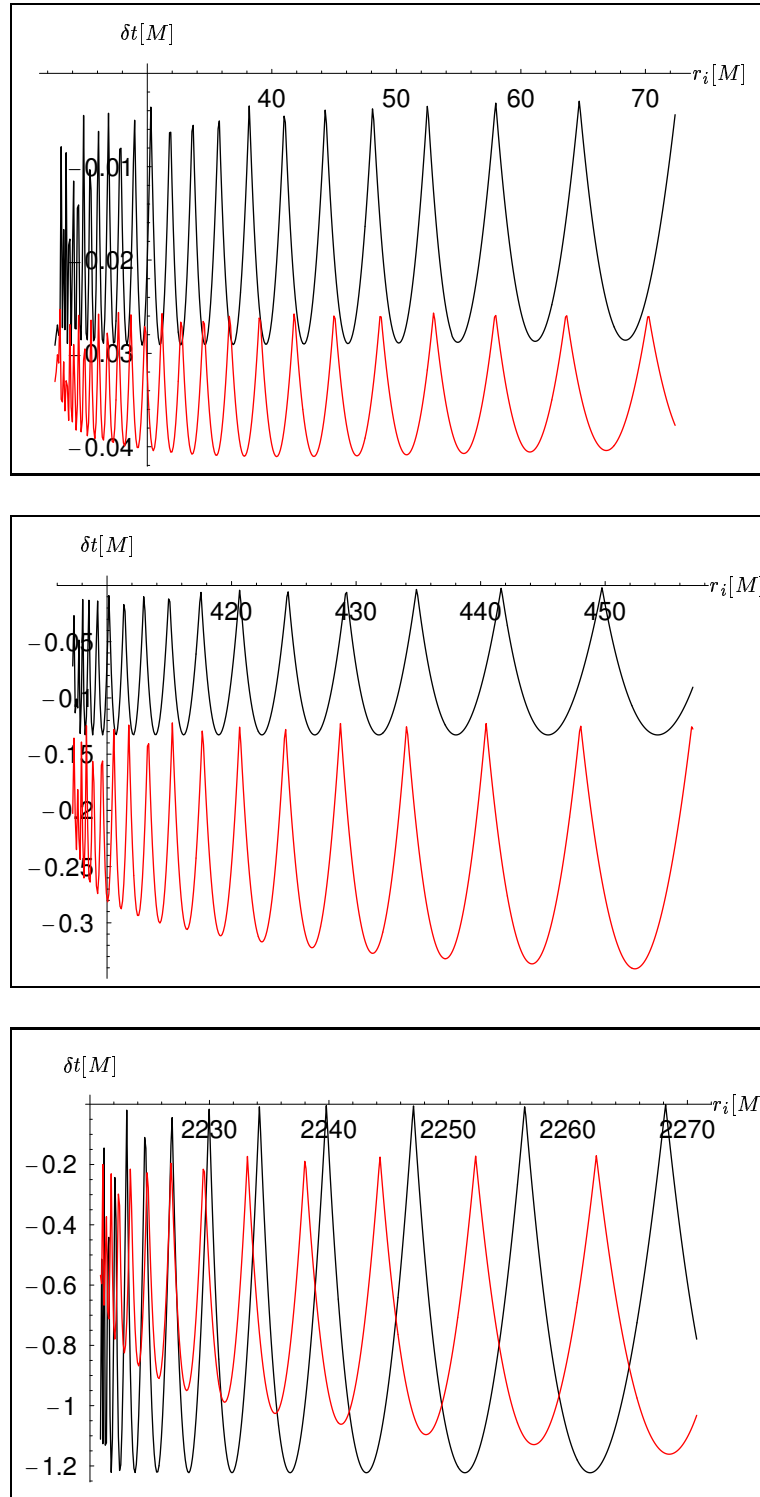




**Slika 15:** Razlika med analitično in numerično rešitvijo za čas  $\Delta t = t(r_f) - t(r_i)$  pred periastronom (črno) in po periastronu (rdeče). Meji integracije  $r_i$  in  $r_f$  sta  $r_{peri} < r_i < r_{peri} + 50M$  in  $r_f = 5000M$ . Na abscisi je razdalja  $r$  v enotah  $M$ , na ordinati pa  $\delta t = t_{an} - t_{num}$  v enotah  $M$ . Vrednosti parametra  $a$  so: a)  $a = a_{krit} - 10^{-5}$ , b)  $a = a_{krit} - 10^{-4}$ , c)  $a = a_{krit} - 10^{-3}$ .



**Slika 16:** Razlika med analitično in numerično rešitvijo za čas  $\Delta t = t(r_f) - t(r_i)$  pred periastronom (črno) in po periastronu (rdeče). Meji integracije  $r_i$  in  $r_f$  sta  $r_{peri} < r_i < r_{peri} + 50M$  in  $r_f = 5000M$ . Na abscisi je razdalja  $r$  v enotah  $M$ , na ordinati pa  $\delta t = t_{an} - t_{num}$  v enotah  $M$ . Vrednosti parametra  $a$  so: a)  $a = a_{krit} - 10^{-2}$ , b)  $a = a_{krit} - 0.1$ , c)  $a = a_{krit} - 0.2$ .



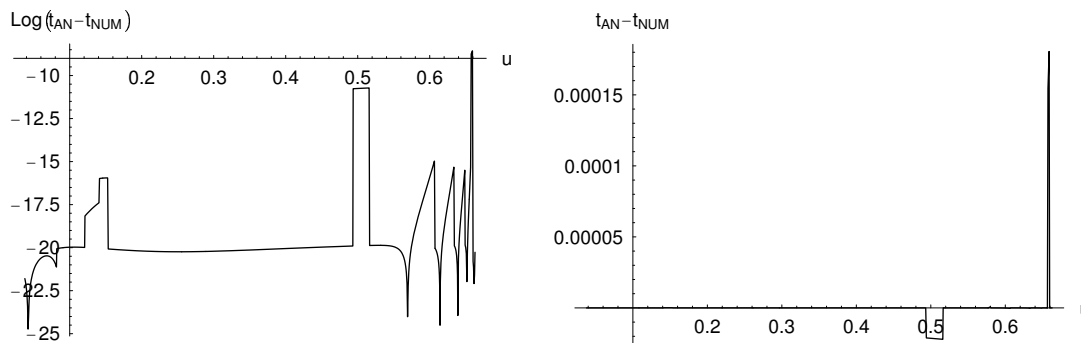
**Slika 17:** Razlika med analitično in numerično rešitvijo za čas  $\Delta t = t(r_f) - t(r_i)$  pred periastronom (črno) in po periastronu (rdeče). Meji integracije  $r_i$  in  $r_f$  sta  $r_{peri} < r_i < r_{peri} + 50M$  in  $r_f = 5000M$ . Na abscisi je razdalja  $r$  v enotah  $M$ , na ordinati pa  $\delta t = t_{an} - t_{num}$  v enotah  $M$ . Vrednosti parametra  $a$  so: a)  $a = a_{krit} - 0.3$ , b)  $a = a_{krit} - 0.38$ , c)  $a = a_{krit} - 0.384$ .

Za vrednosti parametra  $a$ , ki so dovolj daleč od  $a = 0$  in  $a = a_{krit}$ , je razlika med obema metodama nekajkrat  $10^{-2}M$ . Za vrednosti parametra  $a \approx a_{krit}$  razlika naraste na  $0.1M$ , če pa je  $a \approx 0$ , je razlika celo  $1.2M$ .

Numerična integracija v [1] je bila izvedena z metodo Runge-Kutta 4. reda s prilagodljivim korakom. Ker se korak spreminja, se tudi perioda na grafih 15, 16 in 17 spreminja. Če je interval  $[a, b]$ , na katerem integriramo, razdeljen na  $N$  podintervalov s točkami  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$ , ki določajo velikost koraka, je numerična integracija najbolj točna v točkah  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$ . To pomeni, da je numerična integracija najbolj točna v tistih točkah na grafih razlike (slike 15 – 17 in 27 – 29), kjer grafi naredijo ostre špice.

Kadar je tam tudi razlika med analitično rešitvijo in numerično metodo najmanjša, je analitična rešitev bolj natančna (slike 16, 17 in vsi primeri za tip B).

Edina možnost, da bi numerična integracija bila bolj natančna, je na grafih na sliki 15, to je za tiste  $a$ , ki so skoraj kritični. Da bi ugotovil, katera metoda je bolj natančna v tem primeru, sem analitično rešitev primerjal še z numerično integracijo, kot jo izvede *Mathematica* (slika18).



**Slika 18:** Levo: Logaritem razlike med analitično rešitvijo in numerično metodo iz Mathematice. Desno: Razlika med analitično rešitvijo in numerično metodo iz Mathematice. V obeh primerih so parametri isti kot na grafu na sliki 15 zgoraj.

Ker je pri istih parametrih kot na sliki 15 zgoraj, razlika med analitično rešitvijo in numerično metodo iz Mathematice manjša od  $2 \cdot 10^{-3}M$  in je razlika med analitično rešitvijo in numerično metodo iz [1] velika tudi do  $0.25M$ , je verjetno analitična metoda bolj natančna tudi v tem primeru.

### 3.3.2 Tip B

Analična rešitev dobljena z Mathematico je pravzaprav ista kot v primeru tipa A. Razlikuje se le v tem, da je samo ničla  $u_1$  realna, ostali dve pa sta kompleksni. Prav tako je nedoločeni integral kompleksen s konstantnim imaginarnim delom, torej bo določeni integral realen. Ker fotoni tipa B končajo v črni luknji je  $u$  omejen z  $0 < u < 1$ .

Kljub vsem poenostavitvam, ta rešitev vseeno ni uporabna za programiranje, ker postanejo argumenti v eliptičnih integralih pri  $a > a_{krit}$  kompleksni. Ker je cilj naloge poiskati rešitev, ki je uporabna tudi za programiranje, bom v tem primeru poiskal rešitev enačbe (98) z razvojem v vrsto. Realni del točne rešitve bom uporabil le za primerjavo z vrsto.

V vrsto razvijemo koren iz enačbe (98)

$$f(u, a) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2(1-u)}}. \quad (105)$$

Ker je  $a > a_{krit}$ , lahko za tiste  $a$ , ki so dosti večji od  $a_{krit}$ , razvijemo funkcijo  $f(u, a)$  tako, da pošljemo  $a$  proti neskončnosti ( $a \rightarrow \infty$ ). Če pa je  $a$  blizu  $a_{krit} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ , lahko pride do težav, ko gre  $u \rightarrow \frac{2}{3}$ . Torej je pri razvoju v vrsto potrebno ločiti dva režima:

1.  $a \gg a_{krit}$
2.  $a \gtrsim a_{krit}$  .

Obe vrsti morata biti taki, da se bosta njuna konvergenčna polmera prekrivala na intervalu  $0 < u < 1$ . V prvem primeru ( $a \gg a_{krit}$ ) je razvoj precej enostaven:<sup>10</sup>

$$f_1(u, a) = \frac{1}{a\sqrt{1 - \frac{u^2(1-u)}{a^2}}} = \frac{1}{a} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{i} \left( \frac{-u^2(1-u)}{a^2} \right)^i \right]. \quad (106)$$

V drugem primeru ( $a \gtrsim a_{krit}$ ) pa je potrebno  $f(u, a)$  razvijati okoli točke  $u = \frac{2}{3}$ . Z upoštevanjem zveze

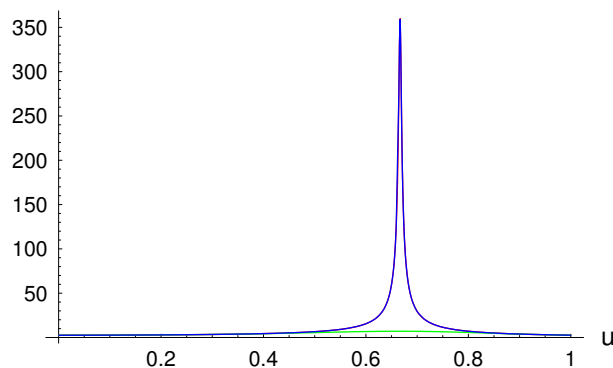
$$a^2 - u^2(1-u) = a^2 - a_{krit}^2 + \left(u + \frac{1}{3}\right) \left(u - \frac{2}{3}\right)^2 \quad (107)$$

se razvoj funkcije  $f(u, a)$  v vrsto zapiše kot (pog. A.3, str. 51)

$$f_2(u, a) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - a_{krit}^2 + \left(u - \frac{2}{3}\right)^2}} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{i} \left( \frac{\left(u - \frac{2}{3}\right)^3}{a^2 - a_{krit}^2 + \left(u - \frac{2}{3}\right)^2} \right)^i \right]. \quad (108)$$

Vse tri funkcije ( $f(u, a)$ ,  $f_1(u, a)$  in  $f_2(u, a)$ ) so prikazane na sliki 19.

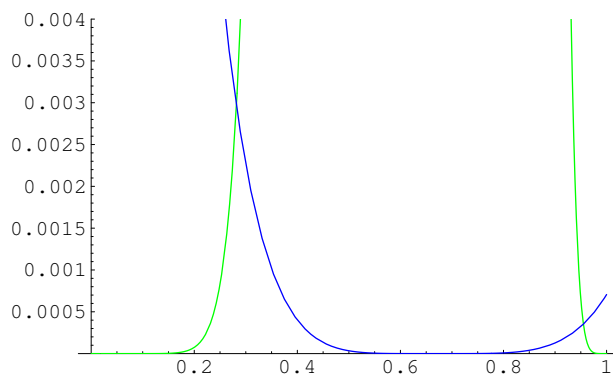
<sup>10</sup>Z  $f_1(u, a)$  sem označil razvoj funkcije  $f(u, a)$  v prvem režimu. Podobno bo v drugem režimu ( $f_2(u, a)$ ).



**Slika 19:** Funkcija  $f(u, a)$  (rdeče), vrsta  $f_1(u, a)$  (zeleno) in vrsta  $f_2(u, a)$  (modro). Ker se vrsta  $f_2$  zelo dobro prilega  $f$ , funkcije  $f$  ni videti na grafu. Funkcije so narisane za primer  $a = a_{krit} + 0.00001$ .

Vidimo, da funkcija  $f_1$  (zeleno barve) dobro aproksimira funkcijo  $f$  (rdeče barve), če je  $u$  precej različen od  $\frac{2}{3}$ . V območju  $u \approx \frac{2}{3}$  pa je precej boljše funkcija  $f_2$  (modre barve). Ujemanje je tako dobro, da na grafu ni videti funkcije  $f$ , ker jo vrsti  $f_2$  in  $f_1$  popolnoma prekrijeta.

Na sliki 20 je prikazana razlika med vrstama in funkcijo  $f_1 - f$  in  $f_2 - f$ .



**Slika 20:** Razlika  $f_1 - f$  (zeleno) in  $f_2 - f$  (modro) v primeru  $a = a_{krit} + 0.00001$ . V obeh vrstah je število členov enako  $N = 5$ . Na abscisi je  $u$ .

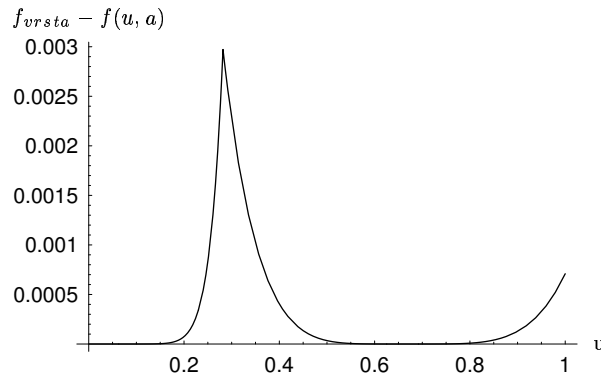
Iz slike je razvidno, da obe vrsti skupaj dobro aproksimirata funkcijo  $f(u, a)$ , torej se konvergenčna polmera obeh vrst prekrivata. Zato obstaja neka meja ( $u_m$ ), kjer je ena vrsta bolj natančna od druge. Mejo dobimo, če ugotovimo, pri katerem  $u_m$  postanejo posamezni členi med vrstama enaki. Izmed vseh rešitev izberemo tisto, ki je realna in leži na intervalu  $u_m \in [0, 1]$ . Taka rešitev je samo ena in je enaka za vse  $a$ :

$$u_m = \frac{2}{9}(3 - \sqrt{3}) . \quad (109)$$

Tako lahko funkcijo  $f(u, a)$  aproksimiramo s kombinacijo vrst  $f_1$  in  $f_2$ :

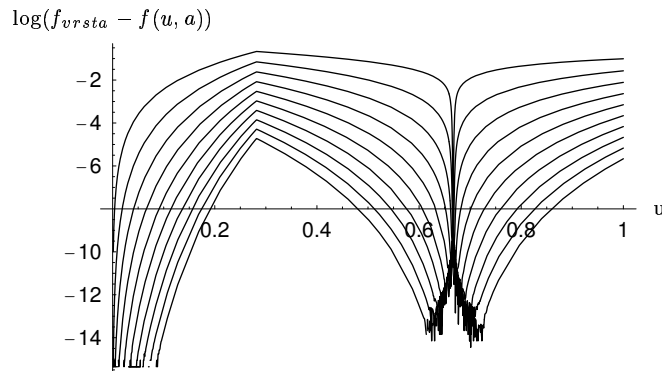
$$f(u, a) = \begin{cases} f_1(u, a) & \text{če je } u < u_m, \\ f_2(u, a) & \text{če je } u > u_m. \end{cases} \quad (110)$$

Graf na sliki 21 prikazuje razliko med tako dobljeno vrsto (110) in funkcijo  $f(u, a)$  pri  $a = a_{krit} + 0.00001$  in  $N = 5$ .



**Slika 21:** Razlika med aproksimacijo (en.110) in funkcijo  $f(u, a)$  v primeru  $a = a_{krit} + 0.00001$  in  $N = 5$ .

Graf na sliki 22 prikazuje razliko med (110) in  $f(u, a)$  v odvisnosti od  $u$  pri  $a = a_{krit} + 0.00001$  in za različno število členov  $N$ .

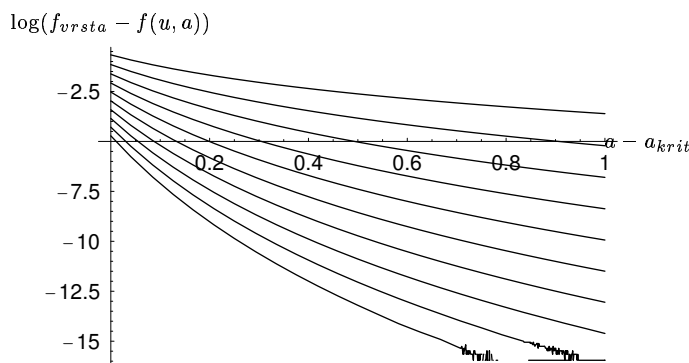


**Slika 22:** Logaritem razlike med aproksimacijo (en.110) in funkcijo  $f(u, a)$  v primeru  $a = a_{krit} + 0.00001$  za  $N$  od 1 do 10.

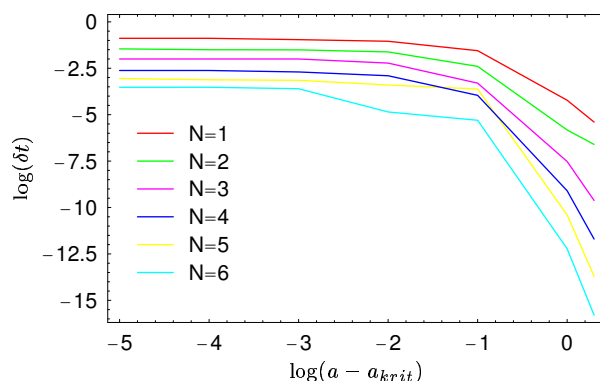
Graf na sliki 23 prikazuje razliko med (110) in  $f(u, a)$  v odvisnosti od parametra  $a$  pri  $u = u_m$  za različno število členov  $N$ .

Iz slike 21 se da tudi oceniti, kakšno napako bo imel čas, izračunan po tej metodi. Po integraciji bo napaka približno enaka ploščini pod grafom. Na sliki 24 je prikazana ocena napake za čas, ki ga dobimo z integracijo vrste.

Ker imamo dve možnosti za funkcijo  $f(u, a)$ , imamo tudi dve različni možnosti za izračun časa. Katera je pravilna, je odvisno od tega, kje ležita integracijski meji



**Slika 23:** Razlika med aproksimacijo (en.110) in funkcijo  $f(u, a)$  pri  $u = u_m$  za  $N$  od 1 do 10. Na ordinati je logaritem razlike, na abscisi pa  $a - a_{krit}$ .



**Slika 24:** Ocena napake  $\delta t$  dobljena s ploščino pod grafom 21 v odvisnosti od parametra  $a$  za  $N$  od 1 do 6. Na ordinati je  $\log(\delta t)$ , na abscisi pa  $\log(a - a_{krit})$ .

$u_i$  in  $u_f$ . Če obe ležita na isti strani meje  $u_m$ , potem namesto  $f$  uporabimo  $f_1$  ali  $f_2$  v (98). Če pa sta  $u_i$  in  $u_f$  na različnih straneh, integriramo v dveh delih:<sup>11</sup>

$$\Delta t = -2Ma \left[ \int_{u_i}^{u_m} \frac{du}{f_1(u, a)u^2(1-u)} + \int_{u_m}^{u_f} \frac{du}{f_2(u, a)u^2(1-u)} \right]. \quad (111)$$

Pri danem končnem številu členov v vrstah (106) in (108), se da zgornjo enačbo integrirati. Tako dobljena vrsta za čas, se izraža z vsoto logaritma in potenčne vrste za  $u$ :

$$\Delta t = -2Ma \left( c_0 \ln \frac{u-1}{u} + \sum_{i=1}^N c_i u^i \right), \quad (112)$$

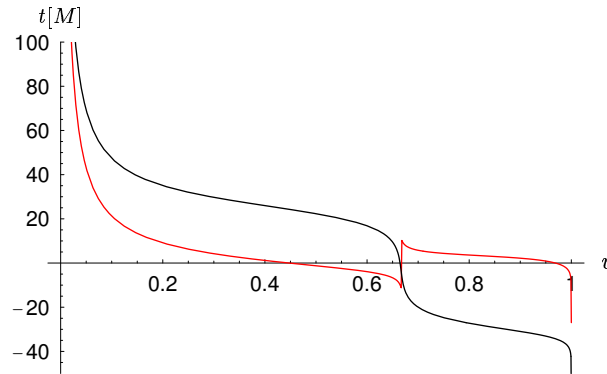
kjer so  $c_i$  konstante, odvisne od parametra  $a$ .

Na sliki 25 so prikazani časi  $t = t(u)$ , dobljeni s kombinacijo vrst  $f_1$  (en.106) in  $f_2$  (en.108) in z realnim delom analitične rešitve.

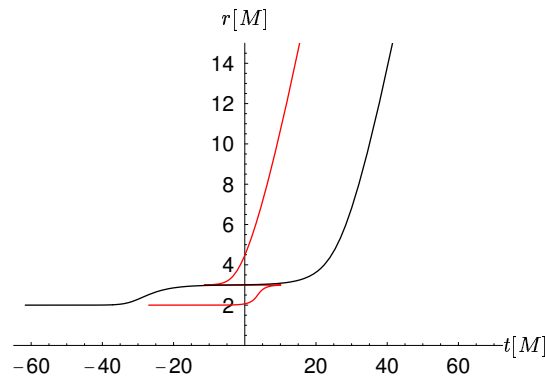
Na sliki 26 je prikazan graf  $r = r(t)$ , izračunan na iste tri načine kot graf  $t = t(u)$ .

<sup>11</sup>Vzel sem, da je  $u_i < u_m$  in  $u_f > u_m$ .





**Slika 25:** Graf  $t = t(u)$ : s kombinacijo vrste  $f_1$  in vrste  $f_2$  (črno) in analitična rešitev (rdeče). Na abscisi je  $u$ , na ordinati pa  $t$ . Vrednost parametra  $a$  je  $a = a_{krit} + 0.00001$ , število členov vrsti pa  $N = 5$ . Ker je  $a$  zelo blizu  $a_{krit}$  se foton nekaj časa navija okoli črne luknje na razdalji  $u = 2/3$ .



**Slika 26:** Graf  $r = r(t)$ : s kombinacijo vrste  $f_1$  in vrste  $f_2$  (črno) in analitična rešitev (rdeče). Na abscisi je  $t$ , na ordinati pa  $r$ . Vrednost parametra  $a$  je  $a = a_{krit} + 0.00001$ , število členov v vrsti pa  $N = 5$ . Ker je  $a$  zelo blizu  $a_{krit}$  se foton nekaj časa navija okoli črne luknje na razdalji  $r = 3M$ .

Ker je v tem primeru  $a$  zelo blizu  $a_{krit}$  ( $a = a_{krit} + 0.00001$ ) se foton nekaj časa navija okoli črne luknje na razdalji  $r = 3M$ . Očitno je, da je v tem primeru analitična rešitev (t.j. realni del kompleksne rešitve) slabša od vrste, ker izgleda, kot da bi se foton na začetku nekaj časa gibal nazaj.

Rešitev z vrsto se nekaj časa ujema z analitično, če pa je  $a \approx a_{krit}$  se analitična rešitev zlomi pri kritičnem radiju  $r = 3M$ . Zakaj pride do tega nisem ugotavljal, ker to ni cilj diplome, poleg tega pa sem se že na začetku odločil, da v primeru B analitične rešitve ne bom uporabljal, ker so argumenti eliptičnih integralov kompleksni.

### Primerjava z numerično metodo

Na grafih na slikah 27, 28 in 29 je prikazana razlika med rešitvijo (112) in metodo Runge-Kutta četrtega reda s prilagodljivim korakom [1] za različne vrednosti parametra  $a$ . Na vseh grafih je končna točka enaka  $r_f = 5000M$ , začetna  $r_i$  pa gre od  $2M < r_i < 50M$ .

V vseh primerih je razlika med obema metodama nekaj  $10^{-2}M$ , število členov v vrsti pa je enako  $N = 5$ .

V tabeli 1 je primerjava časov potrebnih za izračun časa potovanja fotonov po obeh metodah za fotone tipa A in B.

	analitično	vrsta	numerično	faktor
tip A: pred periastronom	46s	-	122s	2.65
tip A: po periastronu	82s	-	543s	6.6
tip B	-	5s	135s	27

**Tabela 1:** Primerjava hitrosti med analitično in numerično metodo za  $10^6$  fotonov (tip A in B).

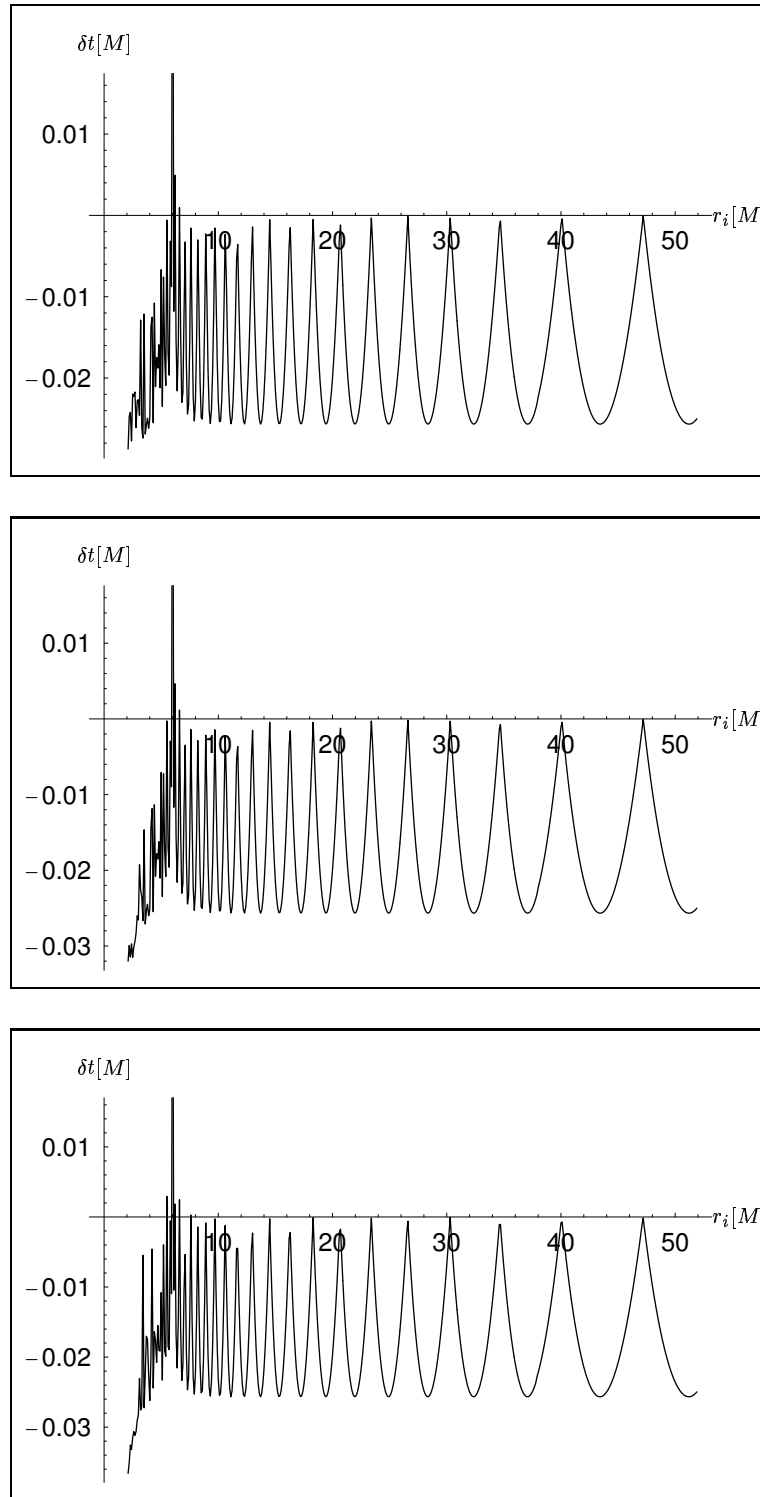
Program [1], ki modelira padec zvezde v črno luknjo, se je z uporabo analitičnih rešitev in razvoja v vrsto pospešil: čas računanja se je zmanjšal iz npr. 9 ur na 6 ur.

Natančnost vrste pri različnem številu členov, se vidi iz grafov 22 in 23. Kolikšno napako naredimo, če čas računamo z vrsto pri različnem številu členov, se vidi iz grafa 24.

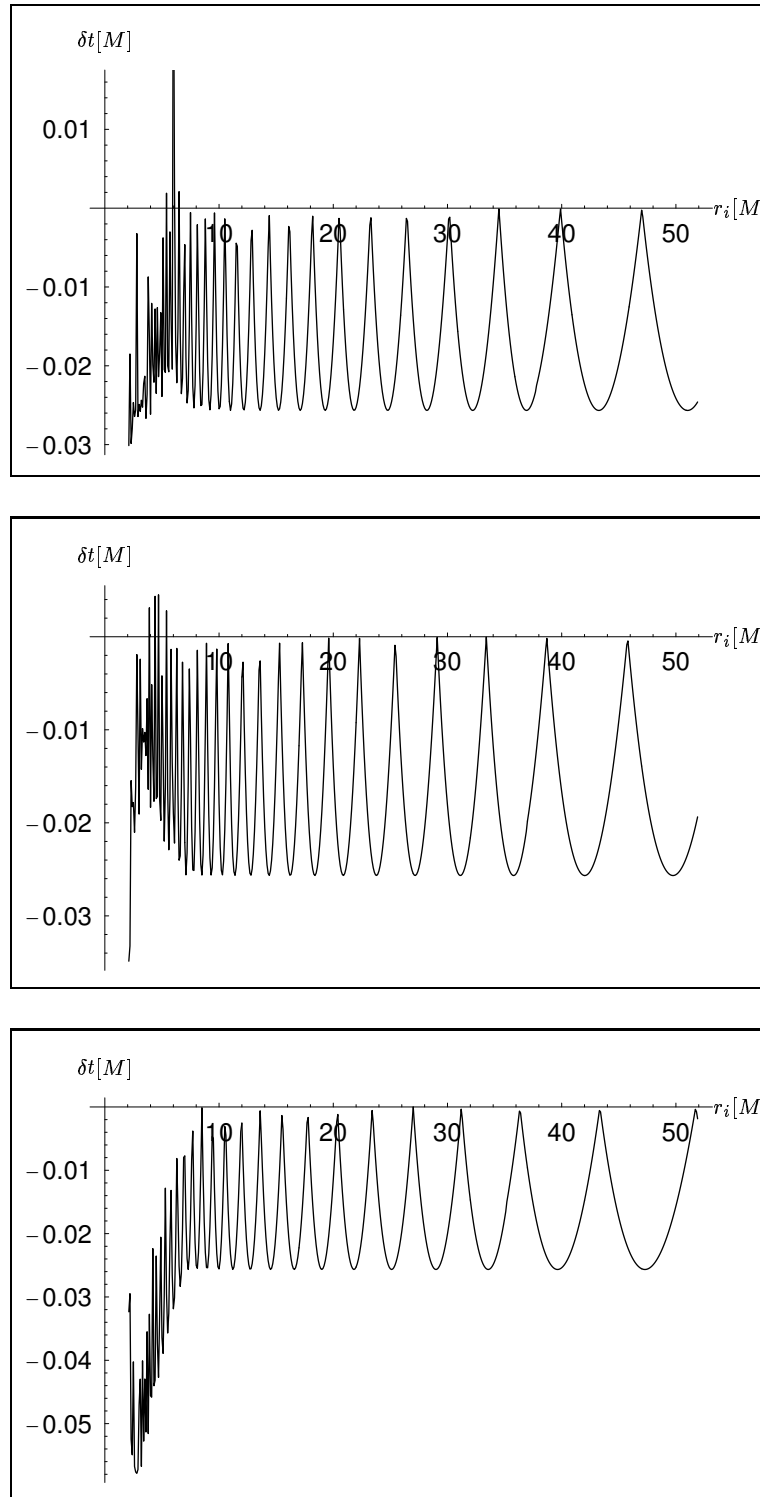
V grafih 27, 28 in 29 sem uporabil vrsto s številom členov  $N = 5$ , zato je napaka te vrste manjša od  $10^{-2}M$  (slika 24), oziroma je enaka kvečjemu nekaj  $10^{-3}M$ . Ker je razlika med numerično integracijo in vrsto približno desetkrat večja, je rešitev z vrsto bolj natančna.

V primeru modela zvezde [1] se fotoni sortirajo glede na čas potovanja v slike, ki nastanejo v razmikih  $1M$ . Zato je v tem primeru napaka nekajkrat  $0.01M$  oziroma manj kot  $0.1M$  najbrž že dovolj majhna. Takšno natančnost ima vrsta že pri treh členih (graf 24).

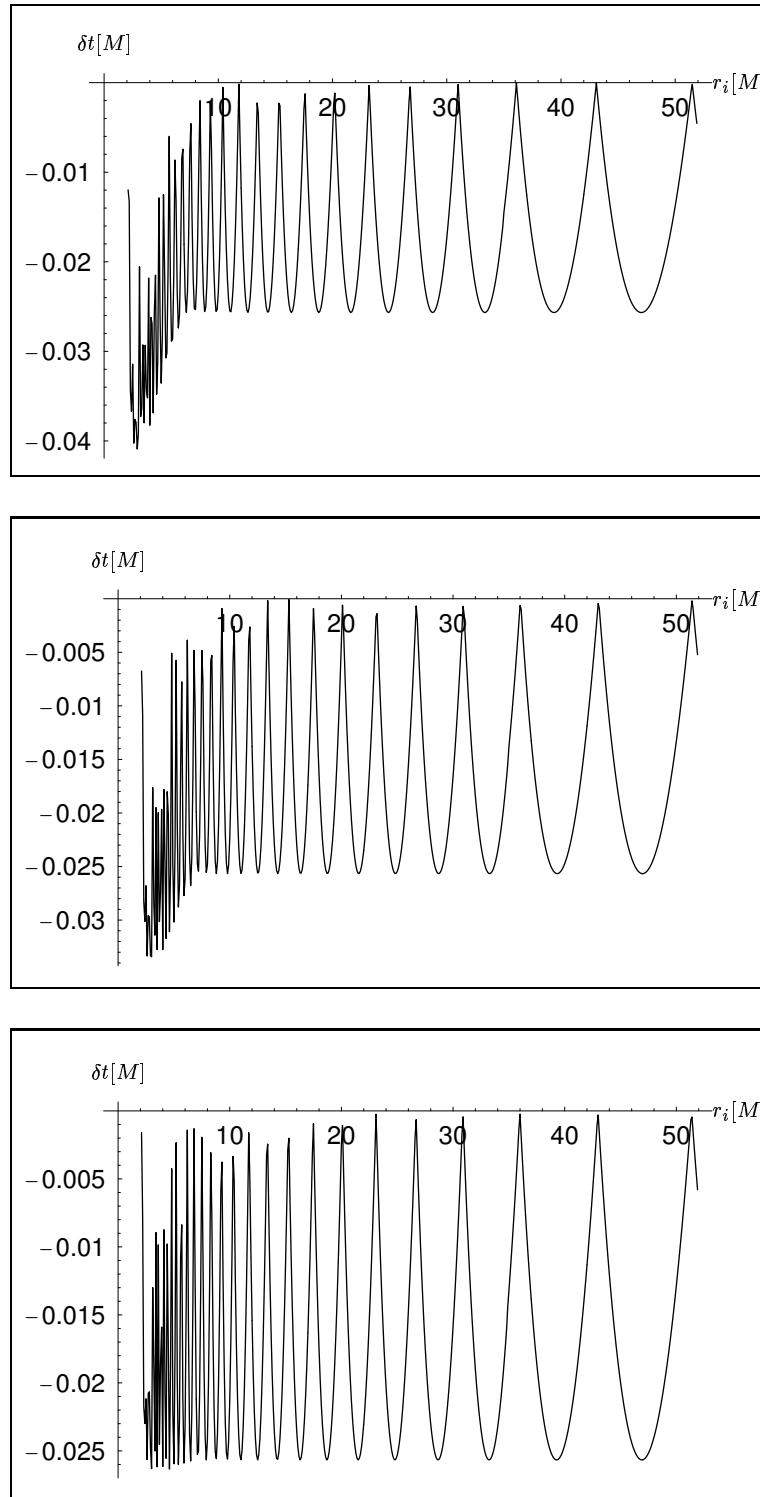
Pri računanju širjenja valovne fronte, pa je potrebna večja natančnost: če bi bila napaka velika  $0.1M$  oziroma nekajkrat  $0.01M$ , se rešitve za tip A in tip B ne bi ujemale pri  $a \approx a_{krit}$ . Posledica tega bi bila, da bi se valovne fronte na kritični orbiti zlomile. Zato sem vzel vrsto s petimi členi, ker ima napako manjšo od  $10^{-2}M$ .



**Slika 27:** Razlika med vrsto s številom členov  $N = 5$  in numerično rešitvijo [1] za čas  $\Delta t = t(r_f) - t(r_i)$ . Meji integracije  $r_i$  in  $r_f$  sta  $2M < r_i < 50M$  in  $r_f = 5000M$ . Na abscisi je razdalja  $r$  v enotah  $M$ , na ordinati pa  $\delta t = t_{vr} - t_{num}$  v enotah  $M$ . Vrednosti parametra  $a$  so: a)  $a = a_{krit} + 10^{-5}$ , b)  $a = a_{krit} + 10^{-4}$ , c)  $a = a_{krit} + 10^{-3}$ .



**Slika 28:** Razlika med vrsto s številom členov  $N = 5$  in numerično rešitvijo [1] za čas  $\Delta t = t(r_f) - t(r_i)$ . Meji integracije  $r_i$  in  $r_f$  sta  $2M < r_i < 50M$  in  $r_f = 5000M$ . Na abscisi je razdalja  $r$  v enotah  $M$ , na ordinati pa  $\delta t = t_{vr} - t_{num}$  v enotah  $M$ . Vrednosti parametra  $a$  so: a)  $a = a_{krit} + 10^{-2}$ , b)  $a = a_{krit} + 0.1$ , c)  $a = a_{krit} + 1$ .



**Slika 29:** Razlika med vrsto s številom členov  $N = 5$  in numerično rešitvijo [1] za čas  $\Delta t = t(r_f) - t(r_i)$ . Meji integracije  $r_i$  in  $r_f$  sta  $2M < r_i < 50M$  in  $r_f = 5000M$ . Na abscisi je razdalja  $r$  v enotah  $M$ , na ordinati pa  $\delta t = t_{vr} - t_{num}$  v enotah  $M$ . Vrednosti parametra  $a$  so: a)  $a = a_{krit} + 2$ , b)  $a = a_{krit} + 3$ , c)  $a = a_{krit} + 10$ .

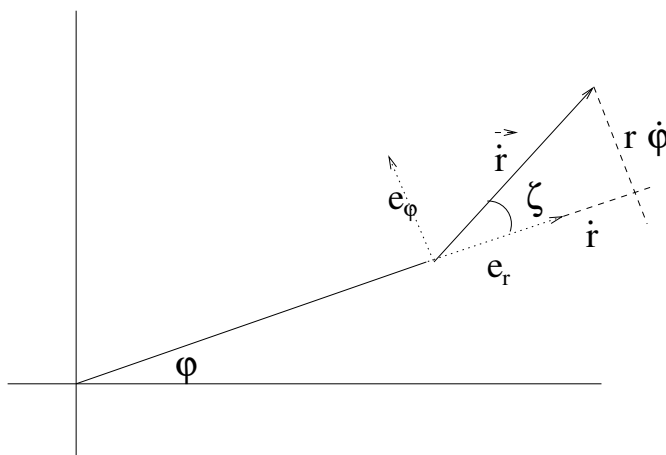
## 4 Širjenje svetlobe v bližini črne luknje

Z znanimi potovalnimi časi fotonov in enačbami orbite se da prikazati, kako se širi valovna fronta v okolici črne luknje. To ustreza npr. bliskom svetlobe, ki nastanejo v akrecijskem disku okoli črne luknje. Ker se svetloba v močnem gravitacijskem polju močno ukrivi, pričakujem, da se valovne fronte na določeni razdalji ne bodo več širile radialno od točke izvora, ampak se bodo začele ukrivljati proti črni luknji (sliki 32 in 33).

Program je narejen s programskim jezikom Delphi, algoritem je pa naslednji:

1. Določi število fotonov, s katerimi aproksimiramo valovno fronto.
2. Določi začetno točko  $(r_i, \varphi_i)$ , iz katere se bo valovna fronta širila.
3. Določi parameter  $a$  in s tem tudi tip orbite (A ali B) za vsak foton.
4. Ob nekem času  $T$  numerično določi novo razdaljo  $r_f$  iz enačbe za čas (99, 112).
5. Iz enačbe orbite (50, 61) določi nov kot  $\lambda$  oziroma  $\varphi$ .
6. Nariše fotone pri novih legah.
7. Poveča čas na  $T = T + \Delta T$ .

V tem programu se parameter  $a$  določi drugače kot je opisano v podpoglavju 3.2, ker ne poznamo končnih točk za fotone. V tem primeru zadošča, da si izberemo smer, v katero bo foton odletel.



Slika 30: K določanju parametra  $a$ .

S pomočjo slike 30 in trigonometrije zapišemo:

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \quad (113)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi \quad (114)$$

$$\tan \frac{\zeta}{2} = \frac{r\dot{\varphi}}{\dot{r} + \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}}. \quad (115)$$

Z upoštevanjem enačb (16) in (18), dobimo enačbo

$$\tan \frac{\zeta}{2} = \frac{u}{\pm \sqrt{a^2 - u^2(1-u)} + \sqrt{a^2 + u^3}}, \quad (116)$$

ki je ob danem začetnem  $u = u_i$  enostavno rešljiva. Z uvedbo konstant

$$\alpha = \frac{u}{\tan \frac{\zeta}{2}} \quad (117)$$

$$\beta = u^2(1-u) \quad (118)$$

$$\gamma = u^3 \quad (119)$$

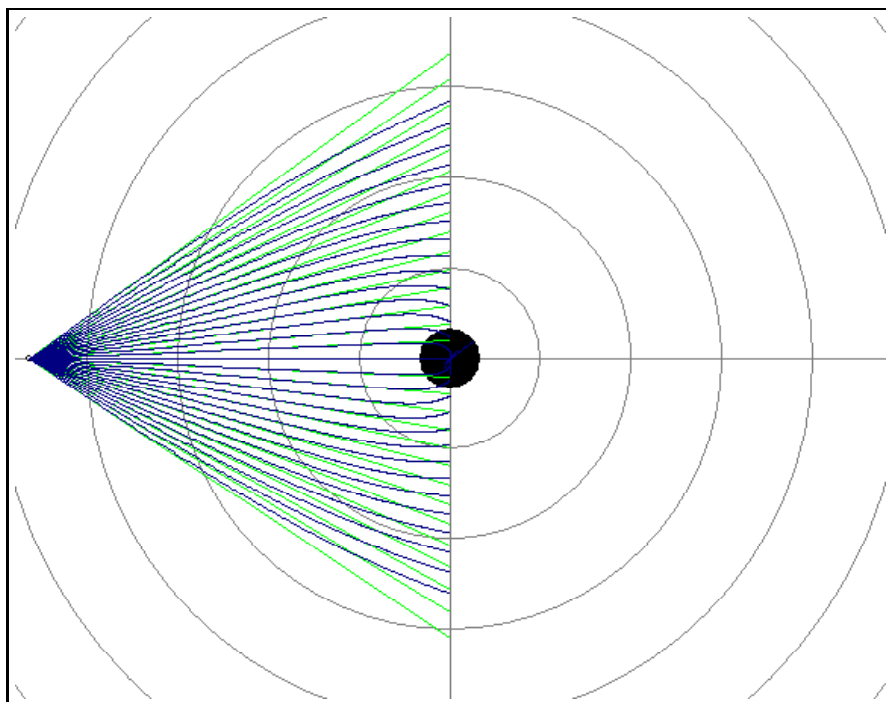
dobimo rešitev za parameter  $a$ :

$$a = \frac{\sqrt{4\beta\gamma + (\alpha^2 + \beta - \gamma)^2}}{2\alpha}. \quad (120)$$

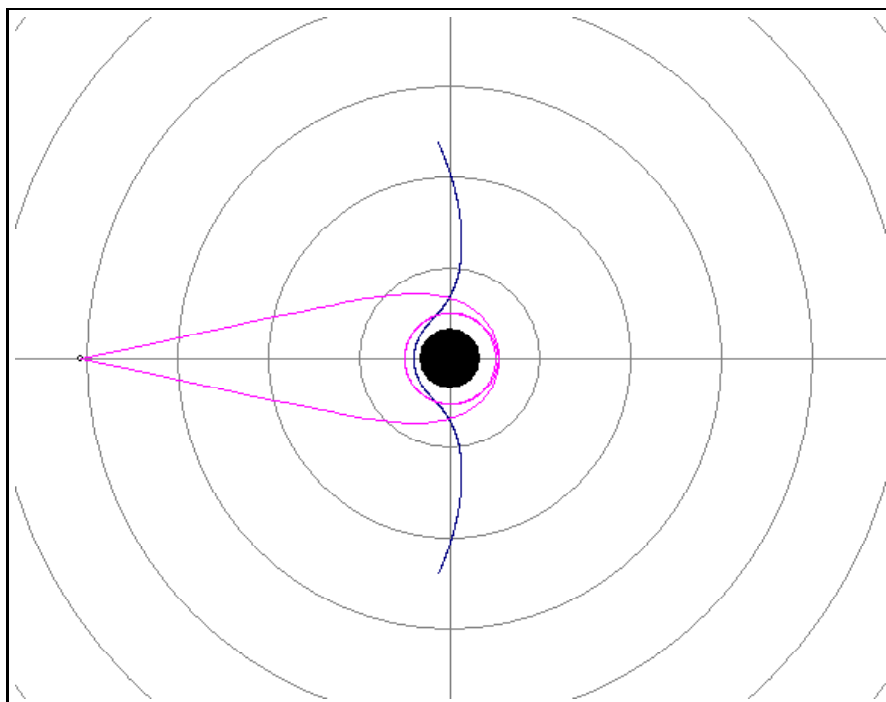
Na sliki 31 so prikazane tako dobljene začetne smeri in orbite fotonov.

Na sliki 34 je prikazano širjenje valovne fronte. Narisana tudi kritična orbita (roza) in valovne fronte (modro) ob časovnih presledkih  $\Delta T = 5M$ .

Valovne fronte se pri neki razdalji več ne širijo radialno od izvora ampak se začnejo vedno bolj ukrivljati. Vsi fotoni, ki so tipa B, končajo v črni luknji.

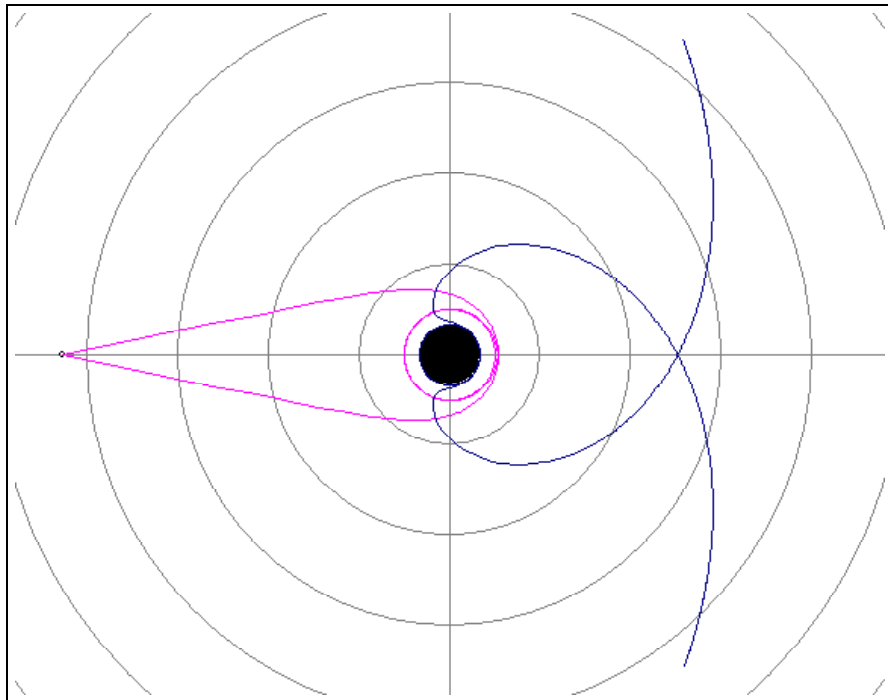


**Slika 31:** Začetne smeri fotonov (zeleno) dobljene z enačbo (120) in orbite fotonov (modro).

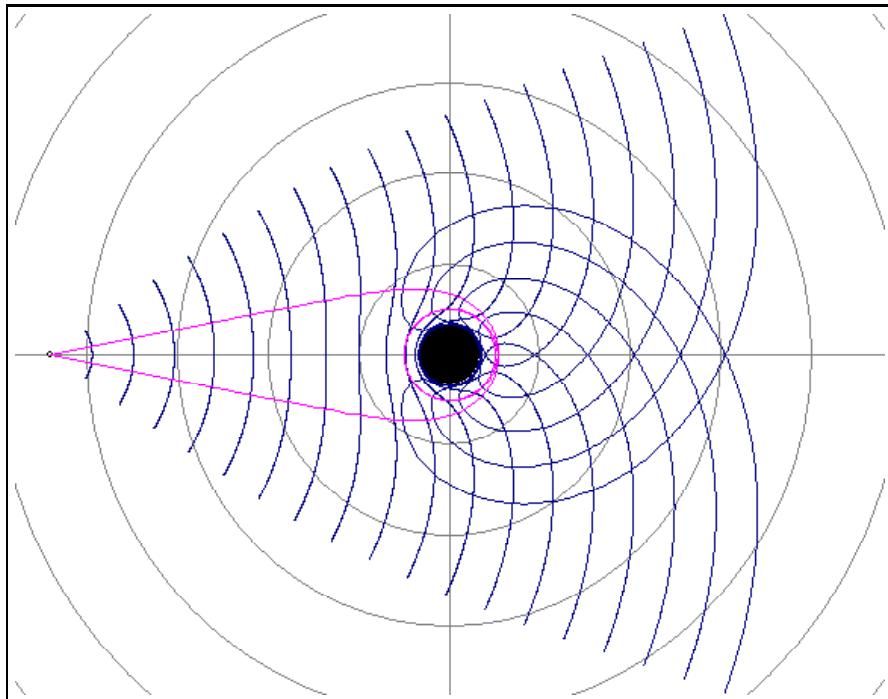


**Slika 32:** Primer ukrivljene valovne fronte (modro). Kritična orbita je roza barve.





**Slika 33:** Primer ukrivljene valovne fronte (modro). Kritična orbita je roza barve.



**Slika 34:** Širjenje valovne fronte.

## 5 Zaključek

V tem delu sem povzel rešitve gibalnih enačb za fotone v bližini Schwarzschildske črne luknje. Poiskal sem analitične rešitve za čas potovanja fotona. Rešitve sem preizkusil tako, da sem opisal širjenje prvotno krogelnega vala v bližini črne luknje.

Orbite fotonov se delijo na dve skupini (A in B). Fotoni tipa A letijo iz neskončnosti v neskončnost in se najbolj približajo črni luknji v periastronu. Fotoni tipa B letijo iz neskončnosti in končajo v črni luknji. Katerega tipa so orbite je odvisno le od enega parametra  $a$ . Za  $a < \frac{2}{3\sqrt{3}}$  so orbite tipa A, za  $a > \frac{2}{3\sqrt{3}}$  pa so tipa B. Če je  $a = \frac{2}{3\sqrt{3}}$  je to kritična orbita; taki fotoni se približajo črni luknji in začnejo krožiti okoli nje na razdalji  $r = 3M$ .

Dve poljubni končni točki sem povezal z orbito tako, da sem naredil program, ki iz enačbe orbite za dano začetno in končno točko določi parameter  $a$  in nariše orbito. Fotoni tipa A niso enolično povezani z eno samo orbito; pri dveh danih točkah obstaja več rešitev za parameter  $a$ . To so orbite, ki se večkrat navijejo okoli črne luknje.

Analitična rešitev za čas potovanja fotona med dvema poljubnima točkama za fotone tipa A se izraža z eliptičnimi integrali, rešitev za fotone tipa B pa je zapisana s kombinacijo dveh potenčnih vrst. Algoritem za izračun časa po obeh metodah je hitrejši od numerične integracije. Ker je rešitev za tip A analitična, je njena natančnost omejena z natančnostjo algoritmov za izračun eliptičnih integralov [7]. Pri rešitvi z vrsto (tip B) lahko z dovolj velikim številom členov dosežemo poljubno natančnost. Obe rešitvi sem uporabil v programu, ki prikazuje širjenje valovne fronte v gravitacijskem polju črne luknje.

Širjenje valovne fronte iz slike 34 ustreza širjenju bliska svetlobe v disku okoli črne luknje. Taki bliski so lahko posledica npr. trkov med delci v disku. Zaradi močnega gravitacijskega polja črne luknje pride do gravitacijskega lečenja, ki spremeni obliko valovne fronte.

## A Dodatek

### A.1 Hamiltonova funkcija $H$ za fotone in masne delce

Na strani 12 je pokazano, da je Hamiltonova funkcija  $H$  konstantna, zato je vseno pri kakšnem  $r$  je izračunana. Najbolj enostavno je vzeti  $H$  pri  $r \rightarrow \infty$ :

$$H = H(r \rightarrow \infty) = \frac{1}{2}(-p_t^2|_{r \rightarrow \infty} + p_r^2|_{r \rightarrow \infty}), \quad (121)$$

kjer sta impulza  $p_t$  in  $p_r$  enaka

$$p_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} \quad (122)$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\dot{r}}{1 - \frac{2M}{r}}. \quad (123)$$

Ob upoštevanju, da gre  $r$  proti neskončnosti, se  $H$  še dodatno poenostavi

$$H = \frac{1}{2}(-\dot{t}^2 + \dot{r}^2). \quad (124)$$

Velja še:

$$\dot{t} = \frac{\partial t}{\partial \tau} = \gamma \quad (125)$$

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial \tau} = \frac{\partial r}{\partial t} \dot{t} = \frac{\partial r}{\partial t} \gamma. \quad (126)$$

Ne bo odveč ponovno opozorilo, da so enote take, da je  $c = 1$ . Torej odvod  $\frac{\partial r}{\partial t}$  ni enak hitrosti  $v$  ampak  $\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{v}{c} = \beta$ . Tako dobimo vrednosti za  $H$ :

$$\text{FOTONI: } H = \frac{1}{2}(-\gamma^2 + \gamma^2) = 0 \quad (127)$$

$$\text{DELICI: } H = \frac{-\gamma^2}{2}(1 - \beta^2) = -\frac{1}{2}. \quad (128)$$

## A.2 Vrtilna količina - konstanta gibanja

Komponenti  $l_x$  in  $l_y$  vrtilne količine se izrazita z impulzi in krogelnimi koordinatami:

$$l_x = \cot \theta \cos \varphi p_\varphi + \sin \varphi p_\theta = \operatorname{Re} \left[ (\cot \theta p_\varphi - ip_\theta) e^{i\varphi} \right] \quad (129)$$

$$l_y = \cot \theta \sin \varphi p_\varphi - \cos \varphi p_\theta = \operatorname{Im} \left[ (\cot \theta p_\varphi - ip_\theta) e^{i\varphi} \right]. \quad (130)$$

Definiramo nove spremenljivke:

$$l_+ = l_x + il_y = (\cot \theta p_\varphi - ip_\theta) e^{i\varphi} \quad (131)$$

$$l_- = l_x - il_y = l_x^*. \quad (132)$$

Odvod neke količine po času dobimo s Poissonovim oklepajem:

$$\frac{du}{d\tau} = [u, H] + \frac{\partial u}{\partial \tau}. \quad (133)$$

Če  $u$  ni eksplicitno odvisna od časa, je konstantna, če je le Poissonov oklepaj s Hamiltonovo funkcijo enak nič. V primeru  $l_+$  je  $[l_+, H]$  enak

$$\begin{aligned} [l_+, H] &= \frac{\partial l_+}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial p_\theta} - \frac{\partial l_+}{\partial p_\theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{\partial l_+}{\partial \varphi} \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} \\ &= -e^{i\varphi} \frac{p_\varphi p_\theta}{\sin^2 \theta r^2} - ie^{i\varphi} \frac{p_\varphi^2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} + \\ &\quad + i(\cot \theta p_\varphi - ip_\theta) e^{i\varphi} \frac{p_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (134)$$

Ker sta  $l_+$  in  $l_-$  konjugirano kompleksna, je tudi  $[l_-, H] = 0$ . Ko izrazimo  $l_x$  in  $l_y$  z  $l_+$  in  $l_-$ , ugotovimo, da sta Poissonova oklepaja za  $l_x$  in  $l_y$  enaka nič:

$$[l_x, H] = \frac{1}{2} \left( [l_+, H] + [l_-, H] \right) = 0 \quad (135)$$

$$[l_y, H] = \frac{1}{2i} \left( [l_+, H] - [l_-, H] \right) = 0. \quad (136)$$

Ker sta komponenti vrtilne količine  $l_x$  in  $l_y$  konstanti gibanja, je tudi celotna vrtilna količina konstanta gibanja:

$$l^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = \cot^2 \theta p_\varphi^2 + p_\theta^2 + p_\varphi^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta}. \quad (137)$$

### A.3 Razvoj v vrsto $f(u, a)$ okoli točke $u = \frac{2}{3}$

Funkcijo  $f(u, a)$

$$f(u, a) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2(1 - u)}} \quad (138)$$

razvijemo v vrsto okoli točke  $u = \frac{2}{3}$  z uporabo zveze

$$a^2 - u^2(1 - u) = a^2 - a_{krit}^2 + \left(u + \frac{1}{3}\right) \left(u - \frac{2}{3}\right)^2, \quad (139)$$

tako da se funkcija  $f(u, a)$  zapiše kot

$$f(u, a) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - a_{krit}^2 + \left(u - \frac{2}{3}\right)^2 \left(u - \frac{2}{3} + 1\right)}}. \quad (140)$$

V drugem oklepaju pod korenem  $\left(u - \frac{2}{3} + 1\right)$  uporabimo substitucijo  $u - \frac{2}{3} = z$  in zapišemo enačbo za  $f$

$$f(u, a, z) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - a_{krit}^2 + \left(u - \frac{2}{3}\right)^2 (z + 1)}}. \quad (141)$$

Razvijemo v vrsto okoli točke  $u = \frac{2}{3}$  oz.  $z = 0$ :

$$f(u, a, z) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - a_{krit}^2 + \left(u - \frac{2}{3}\right)^2}} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{i} \left( \frac{\left(u - \frac{2}{3}\right)^3 z}{a^2 - a_{krit}^2 + \left(u - \frac{2}{3}\right)^2} \right)^i \right]. \quad (142)$$

Ta vrsta zelo hitro konvergira, ker gre  $z \rightarrow 0$ . Spet upoštevamo, da je  $z = u - \frac{2}{3}$  in dobimo končen izraz za razvoj funkcije  $f(u, a)$  v vrsto:

$$f(u, a) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - a_{krit}^2 + \left(u - \frac{2}{3}\right)^2}} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{i} \left( \frac{\left(u - \frac{2}{3}\right)^3}{a^2 - a_{krit}^2 + \left(u - \frac{2}{3}\right)^2} \right)^i \right]. \quad (143)$$

## Literatura

- [1] A. Gomboc. *Hitre spremembe izseva ob interakciji s črno luknjo*. Disertacija, Univerza v Ljubljani, FMF (2001).
- [2] A. Čadež. Teorija relativnosti (2000). Skripta v pripravi.
- [3] A. Čadež in A. Gomboc. *Astron. & Astrophys. Suppl. Ser.* **119**, 293 (1996).
- [4] M. Brajnik. *Diplomsko delo* (Univerza v Ljubljani, FMF, 1999).
- [5] H. Hancock. *Elliptic Integrals* (Dover Publications, Inc., New York, 1958).
- [6] I. N. Brønstein et al.. *Matematični priročnik* (Tehnična založba Slovenije, 1997).
- [7] P. W.H., T. S.A. et al.. *Numerical Recipes in C* (Cambridge university Press, 1988).
- [8] I. Kuščer in A. Kodre. *Matematika v fiziki in tehniki* (Društvo matematikov, fizikov in astronomov Ljubljana, 1994).
- [9] G. J. Fisfman in C. A. Meegan. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **33**, 415 (1999).
- [10] S. Komossa. X-ray evidence for supermassive black holes at the centres of the nearby, non-active galaxies (2002). ArXiv:astro-ph/0209007.
- [11] H. Ohanian in R. Ruffini. *Gravitation and Spacetime* (W. W. Norton & Company, Inc., New York, 1994).