

TEORIJA GRAVITACIJE  
**Geodetke v Schwarzschildovi metriki**

Gregor Kladnik

astronomsko-geofizikalna smer

## 1 Uvod

Glavna enačba splošne teorije relativnosti je Einsteinova enačba polja ( $G = c = 1$ ) [1, 2]

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

kjer je  $G_{\mu\nu}$  Einsteinov tenzor ter  $T_{\mu\nu}$  napetostni tenzor. Pri tem je Einsteinov tenzor tesno povezan z *Riccijevim* tenzorjem  $R_{\mu\nu}$  in njegovo sledjo  $R = R^\mu{}_\mu$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.2)$$

pri čemer je  $g_{\mu\nu}$  metrični tenzor. Riccijev tenzor ni nič drugega kot skrčen *Riemannov* tenzor  $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ :  $R_{\alpha\beta} = R^\mu{}_{\alpha\mu\beta}$ . Riemannov tenzor je povezan s *Christoffelovimi* simboli  $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ , le-ti pa so direktno povezani z metriko  $g_{\mu\nu}$ . Rešitev enačbe (1.1) za sferno simetričen problem stacionarne mase je prvi podal Schwarzschild le nekaj mesecev po Einsteinovi izpeljavi enačbe (1.1).

### Schwarzschildova rešitev

V Schwarzschildovih koordinatah  $(t, r, \theta, \phi)$  je metrika poljubnega statičnega sferno-simetričnega prostor-časa oblike [1, 2]

$$ds^2 = -f(r)c^2 dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.3)$$

Leta 1923 je Birkhoff pokazal, da je privzetek statičnosti odveč – vsi sferno simetrični prostor-časi z  $R_{\alpha\beta} = 0$  (ustreza pogoju za rešitev Einsteinove enačbe v vakuumu, kjer je napetostno tenzor  $T_{\mu\nu}$  identično enak 0) so *statični*. Analogija k temu t.i. *Birkhoffovemu teoremu* je v elektromagnetizmu dejstvo, da je Coulombova rešitev edina sferno simetrična statična rešitev Maxwellovih enačb v vakuumu. Interpretiramo jo lahko kot pogoj, da tako pri gravitaciji

kot v elektromagnetizmu ne obstaja monopolno (sferno simetrično) sevanje. [2]

Končno zapišimo Schwarzschildovo rešitev [1, 2]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.4)$$

kjer je  $2M$  Schwarzschildov radij  $r_S = 2M = \frac{2GM}{c^2}$  (radij črne luknje z maso  $M$ ).

## 2 Geodetke v Schwarzschildovi metriki

Orbite delcev ustrezajo geodetkam v prostor-času. Komponente baze tangente  $u^\mu$  na krivuljo parametrizirano z  $\tau$  je

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \dot{x}^\mu. \quad (2.1)$$

Za časovne geodetke izberemo za parameter  $\tau$  lasten čas, za ničelne geodetke pa naj bo  $\tau$  nek afini parameter. Za te primere imamo torej ( $\theta = \pi/2$ )

$$-\kappa = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2, \quad (2.2)$$

kjer je parameter  $\kappa$  enak 1 za časovne geodetke in 0 za ničelne. [2] S pomočjo lagranžijana  $L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$  in Euler-Lagrangeovih enačb

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\sigma}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^\sigma}, \quad (2.3)$$

lahko izračunamo enačbe gibanja prostega delca. Njihove rešitve ustrezajo orbitam, oziroma geodetkam ustrezne metrike.

Zaradi simetričnosti lahko za Schwarzschildovo metriko privzamemo  $\theta = \pi/2$  (gibanje v ekvatorialni ravnini) in zapišemo lagranžijan

$$L = \frac{1}{2}\left(-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right). \quad (2.4)$$

Hitro prepoznamo dve konstanti gibanja

$$\frac{d}{d\tau}\left[r^2\dot{\phi}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\phi = r^2\dot{\phi} = \tilde{l}, \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\dot{t}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad p_0 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\dot{t} = \tilde{e}. \quad (2.6)$$

Enačbo gibanja najlažje dobimo s pomočjo enačbe (2.2), vstavimo zgornja izraza za konstanti gibanja in zapišemo

$$-\kappa = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \tilde{e}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + \frac{\tilde{l}^2}{r^2} \quad (2.7)$$

Pomnožimo izraz z  $\frac{1}{2}$ , brez izgube splošnosti postavimo  $r_S = 1$  (enote dolžine so sedaj v enotah Schwarzschildovega radija  $r_S$ ), [2] preuredimo člene in dobimo

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \left( -\kappa r^{-1} + \mathcal{L}^2 (r^{-2} - r^{-3}) \right) = \frac{\tilde{e}^2 - \kappa}{2} = \mathcal{E}. \quad (2.8)$$

V drugem členu na levi strani enačbe prepoznamo efektivni enodimenzionalni potencial

$$V_{eff} = \frac{1}{2} \left( -\kappa r^{-1} + \mathcal{L}^2 (r^{-2} - r^{-3}) \right). \quad (2.9)$$

Potem ko določimo gibanje v radialni smeri s pomočjo efektivnega potenciala, izračunamo odvisnost kota in Schwarzschildovega časa  $t$  enostavno s pomočjo konstant gibanja in njihovih enačb (2.5) in (2.6). Glavna značilnost dobljene enačbe za efektivni potencial je dodaten relativističen tretji člen, saj v prvih dveh ( $-\kappa/r$  in  $\mathcal{L}^2/r^2$ ) prepoznamo člena Keplerjevega efektivnega potenciala v Newtonovi gravitaciji. Dodaten relativističen člen prevlada nad centrifugalnim členom za majhne vrednosti  $r$ .

## 2.1 Rešitve za ničelne geodetke ( $\kappa = 0$ )

Vstavimo  $\kappa = 0$  v enačbo (2.9) in dobimo efektivni potencial (v enotah celotne energije  $\tilde{e}^2/2 = \mathcal{E}$ ) za ničelne geodetke

$$V_{eff}^{(0)} = \frac{b^2}{r^2} \left( 1 - \frac{1}{r} \right), \quad (2.10)$$

slika (1). Oblika potenciala je neodvisna od parametra  $b$  in kot vidimo na sliki (1) ima le en ekstrem in sicer maksimum pri  $r = 3/2$ . V splošni teoriji relativnosti torej obstajajo nestabilne (maksimum!) krožne orbite fotonov pri radiju  $r = 3/2$ . Najnižja energija potrebna za “prestop” potencialnega zidu je torej enaka

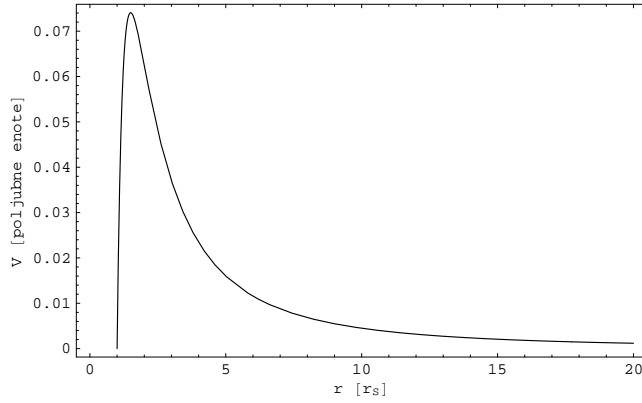
$$1 = V(r = 3/2) = \frac{4b^2}{27}, \quad \text{oziroma} \quad (2.11)$$

$$b^2 = \frac{\mathcal{L}^2}{\tilde{e}^2} = \frac{27}{4}. \quad (2.12)$$

V ravnem prostoru-času je kvocient  $\mathcal{L}/\tilde{e}$  za foton enak parametru trka, t.j. najmanjši razdalji med orbito (žarka, fotona) in izhodiščem (maso, objektom). Schwarzschildov prostor-čas je asimptotično raven ( $g_{\mu\nu} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \eta_{\mu\nu}$ ), zato lahko za foton, ki izhaja iz asimptotično ravnega območja ( $r \gg 1$ ), definiramo navidezni parameter trka [2]

$$b = \frac{\mathcal{L}}{\tilde{e}}, \quad (2.13)$$

čeprav ne predstavlja več najmanjše razdalje med objektom in orbito. Vsak foton z navideznim parametrom trka manjšim od mejnega  $b_c = \sqrt{27}/4$  se bo ujel v telo z maso  $M$ . Iz poteka efektivnega potenciala lahko razberemo,



**Slika 1:** Odvisnost efektivnega potenciala od radialne razdalje  $r$  za ničelno geodetko.

da bodo orbite fotonov z večjim navideznim parametrom trka od mejnega ukrivljene – imele bodo eno obračalno točko.

S pomočjo enačbe gibanja (2.8) in konstant gibanja lahko izračunamo diferencialno enačbo, ki opisuje odvisnost  $r(\phi)$

$$\frac{dr}{d\phi} = r^2 \left( b^{-2} - r^{-2} + r^{-3} \right)^{1/2}. \quad (2.14)$$

Z vpeljavo nove spremenljivke (podobno kot pri reševanju Keplerjevega problema v klasični mehaniki)  $u = 1/r$  se enačba poenostavi v

$$\frac{du}{d\phi} = \left( b^{-2} - u^2 + u^3 \right)^{1/2}. \quad (2.15)$$

### 2.1.1 Potek izračuna trajektorij

Glede na dani navidezni parameter trka  $b$  in začetni pogoj  $(r_0, \phi_0)$  moramo med seboj ločiti tri različne tipe trajektorij:

- Za  $b > b_C$  in začetno oddaljenost  $r_0$  veliko večjo od najbolj oddaljene obračalne točke imamo pojav ukrivljanja svetlobnih žarkov,
- Za  $b < b_C$  se svetlobni žarki ujamejo v črno luknjo,
- Za  $b > b_C$  in začetno oddaljenost  $r_0$  manjšo od najbližje obračalne točke (a hkrati seveda večjo od radija črne luknje, v izračunah privzamemo približno  $r_0 = r_S$ ) imamo trajektorije, ki imajo svoj začetek in konec na “površju” črne luknje.

S pomočjo programskega paketa *Mathematica* implementiramo algoritem za izračun posameznega tipa orbit. Postopamo takole: na začetku definiramo nekaj parametrov kot je navidezni parameter trka  $b$  in začetno oddaljenost  $r_0$  (brez izgube splošnosti smemo privzeti  $\phi_0 = 0$ ). Nato s pomočjo potenciala (2.10) in parametra  $b$  določimo radialne koordinate obeh obračalnih točk. S pomočjo le-teh in začetne oddaljenosti  $r_0$  tako lahko določimo v katerem izmed treh možnih režimov (tipov trajektorij) se nahajamo.

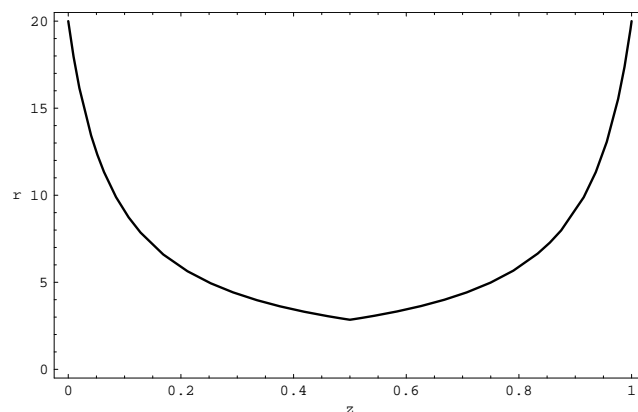
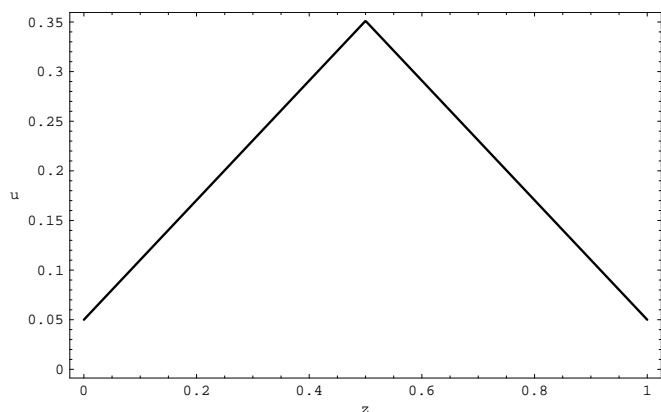
Končno vpeljemo funkcijo

$$\phi(u; b, u_1) = \int_{u_1}^u \left( b^{-2} - w^2 + w^3 \right)^{-1/2} dw, \quad (2.16)$$

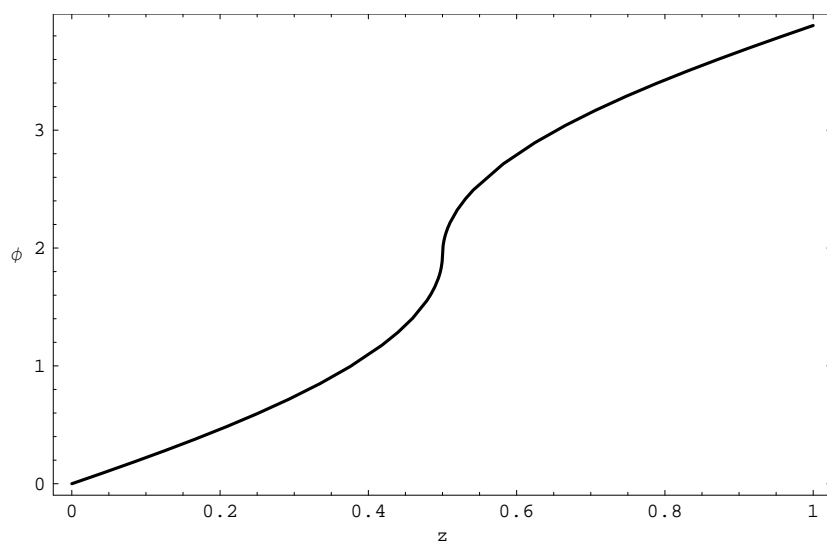
ki je direktno povezana z enačbo (2.15). Potek potenciala nam določa interval za radialno komponento, oziroma za spremenljivko  $u = 1/r$  (imenujmo jo kar “radialno” komponento, čeprav se zavedamo da  $u$  predstavlja inverz le-te). Zgornji integral pa nam za dano začetno vrednost  $u_1$  in vrednost  $u$  poda “polarni” kot. Tako imamo dani obe komponenti radij vektorja, ki opisuje trajektorijo delca (oz. fotona).

Pri tem se uporabi še ena uporabna zvižaja in sicer parametriziramo “radialno” komponento  $u$  z nekim parametrom  $z$ , ki nam meri kje glede na periodo se delec nahaja na orbiti. Povedano drugače, za  $z \in [0, 1)$  opišemo natančno eno periodo orbite. Seveda je takšen pomen parametra  $z$  smislen le za orbite z dvema obračalnima točkama, v primeru ene obračalne točke pa določa potek radialne komponente od  $r_0$  pri  $z = 0$ , do  $r_0$  pri  $z = 1$ ; seveda se pri tem spremeni polarni kot  $\phi$  po enačbi (2.16). Na sliki (2) vidimo potek spremenljivke  $u$  (levo) in  $r$  (desno) v odvisnosti od parametra  $z$  za nek  $b > b_C$ . Na sliki (3) pa vidimo s pomočjo integrala (2.16) in parametrizacije  $u$

izračunan potek polarnega kota  $\phi$  od parametra  $z$ . Poznavanje obeh komponent  $(r(z), \phi(z))$  nam podaja iskano krivuljo (trajektorijo) v parametrizirani obliki.

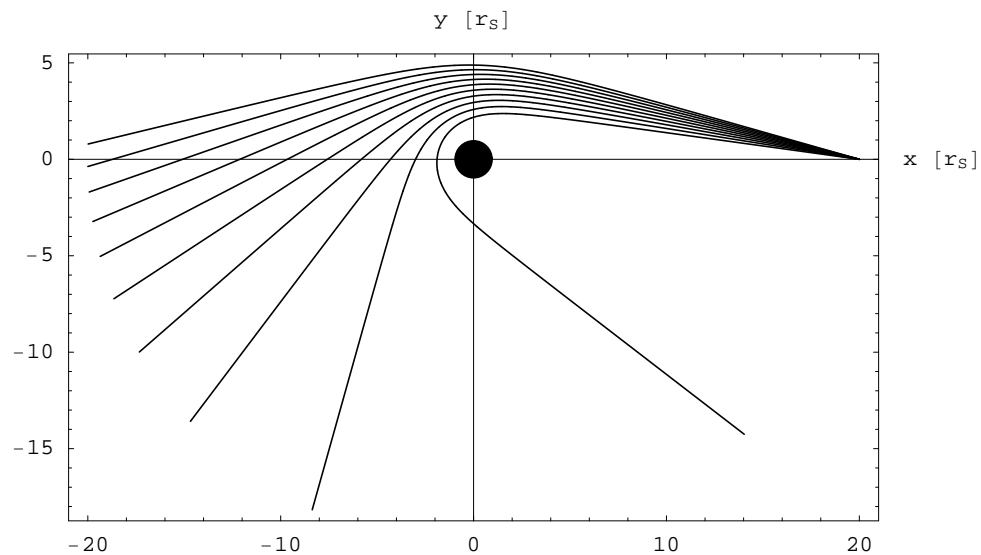


**Slika 2:** Potek spremenljivke  $u$  v odvisnosti od parametra  $z$  (levo), ter potek radialne komponente ( $r = 1/u$ ) od parametra  $z$  (desno).

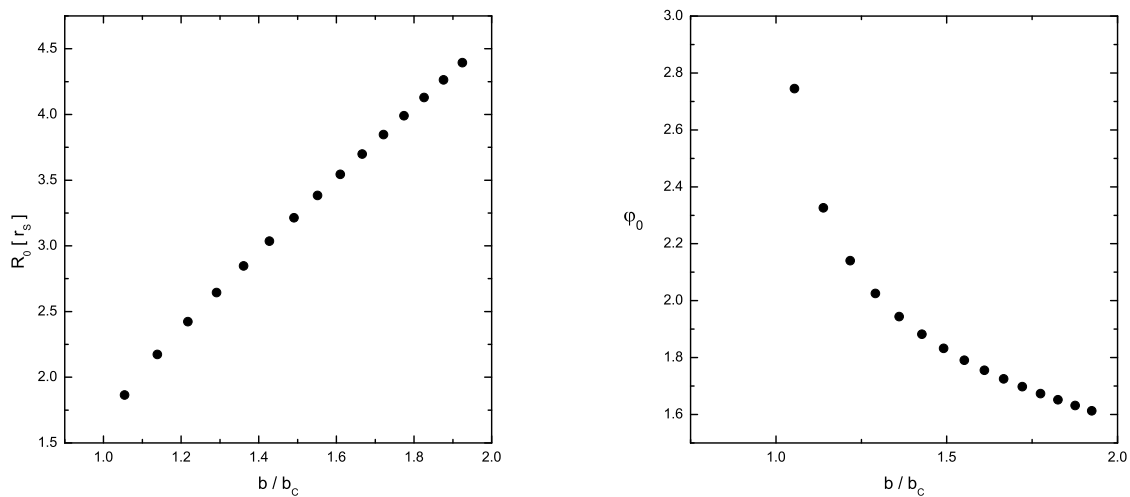


**Slika 3:** Potek "polarnega" kota  $\phi$  v odvisnosti od parametra  $z$  izračunan s pomočjo integrala (2.16) ter ustrezne parametrizacije  $u(z)$ .

### 2.1.2 Ukrivljanje svetlobnih žarkov za $b > b_C$

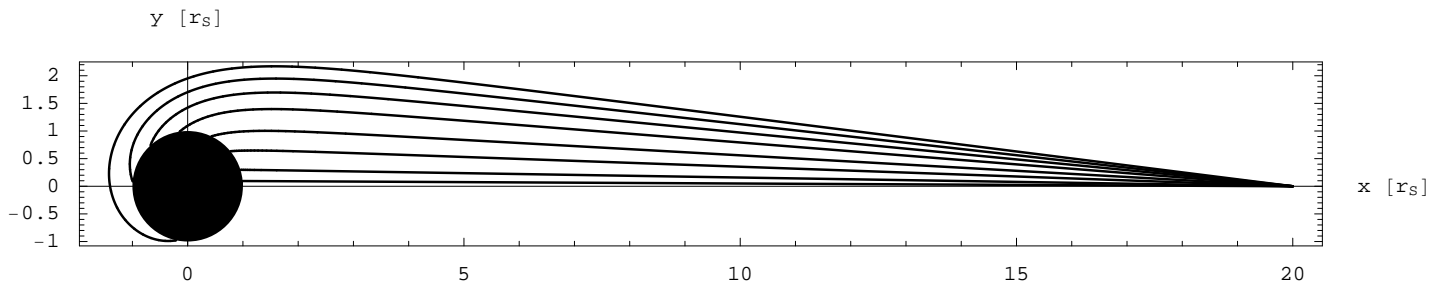


**Slika 4:** Trajektorije svetlobnih žarkov v bližini črne luknje za različne vrednosti parametra  $b$ . ( $r_0 = 20$ )



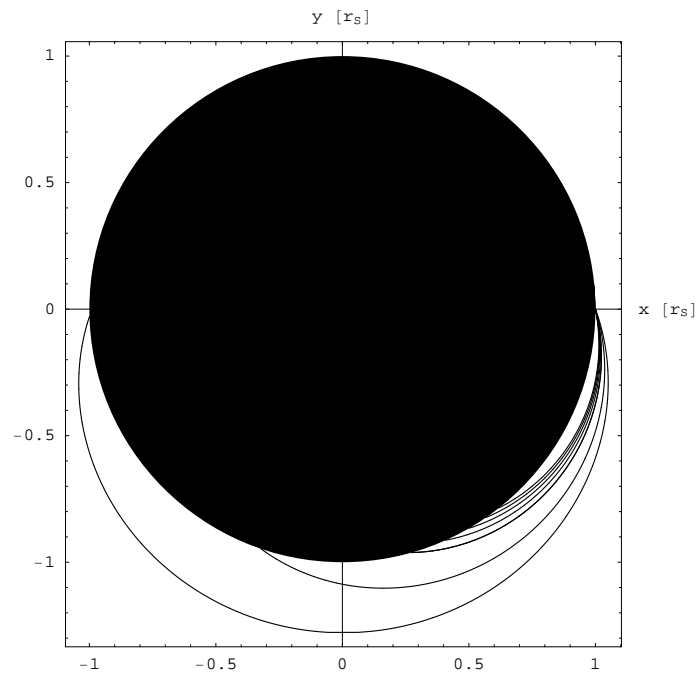
**Slika 5:** Odvisnost “polarnih” koordinat obračalne točke  $T(r, \varphi)$  od parametra  $b$ .

### 2.1.3 Ujetje svetlobnih žarkov za $b < b_C$



**Slika 6:** Slika prikazuje trajektorije svetlobnih žarkov s parametrom  $b$  manjšim od kritičnega, zaradi česar se le-ti ujamejo v črno luknjo. ( $r_0 = 20$ )

### 2.1.4 “Nastanek” in ujetje žarkov pri $r = r_s$ in $b > b_C$



**Slika 7:** “Nastanek” fotonov pri  $r \approx r_s$  in njihove orbite za različne vrednosti parametra  $b$ . Orbite takšnega tipa dovoljuje oblika potenciala, saj za določen  $b > b_C$  obstajata dve obračalni točki, glej sliko (1).

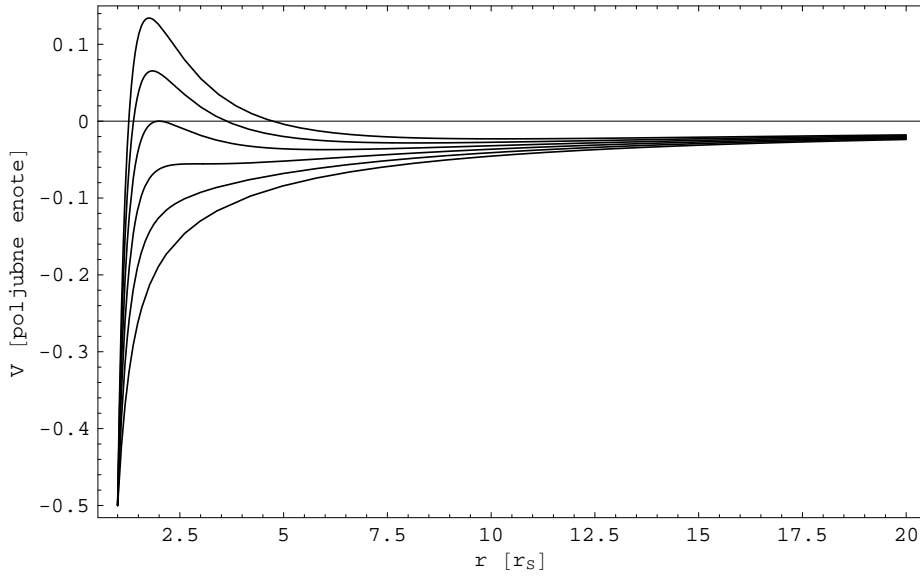


## 2.2 Rešitve za časovne geodetke ( $\kappa = 1$ )

Efektivni potencial za časovne geodetke se potlej zapiše

$$V_{eff} = \frac{1}{2} \left( -r^{-1} + \mathcal{L}^2 (r^{-2} - r^{-3}) \right). \quad (2.17)$$

Trajektorije izračunamo na enak način kot v prejšnjem primeru za ničelne geodetke. Slika (8) prikazuje obliko potenciala za različne vrednosti parametra  $\mathcal{L}$ . S pomočjo slike vidimo, da ima potencial dva ekstrema<sup>1</sup>, čemur ustrezajo



**Slika 8:** Potek efektivnega potenciala za različne vrednosti parametra  $\mathcal{L}$ . Za energijo  $\mathcal{E} < 0$  in  $V_{max} > 0$  imamo vezane orbite.

krožne orbite. Pri tem je orbita kjer ima potencial maksimum nestabilna, v minimumu potenciala pa je stabilna.

Za določitev trajektorij si moramo izbrati najprej dva parametra  $\mathcal{L}$  in celotno energijo  $\mathcal{E}$ . Ločimo lahko štiri (pet) različne tipe trajektorij.

### 2.2.1 Tipi trajektorij za časovne geodetke

Podobno kot v primeru ničelnih geodetk moramo ločiti več različnih tipov trajektorij v odvisnosti od vrednosti parametrov  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{E}$  ter začetnih pogojev  $(r_0, \phi_0)$ . Parameter  $\mathcal{L}$  določa obliko efektivnega potenciala, slika (8),  $\mathcal{E}$  pa energijo delca. Ločimo naslednje primere:

<sup>1</sup>Trditev drži le, če je vrednost parametra  $\mathcal{L}$  večja od  $\sqrt{3}$ .

- Za  $\mathcal{E} < 0 \wedge \mathcal{E} > V_{min}$  imamo vezane orbite z dvema obračalnima točkama, slika (9),
- Za  $\mathcal{E} = V_{min}$  imamo stabilno krožno orbito, slika (11),
- Za  $\mathcal{E} > 0 \wedge \mathcal{E} < V_{max}$  ter  $r_0$  večji od obračalne točke z največjim radijem imamo nevezane trajektorije z eno obračalno točko – sipanje,
- Za  $\mathcal{E} > 0 \wedge \mathcal{E} < V_{max}$  ter  $r_0$  manjši od obračalne točke z najmanjšim radijem imamo trajektorije, ki nastanejo in končajo v bližini  $r_S$  (za  $r_0$  privzamemo kar  $r_0 \approx r_S$ ),
- Za  $\mathcal{E} > V_{max}$  imamo trajektorije delcev, ki padejo v črno luknjo.

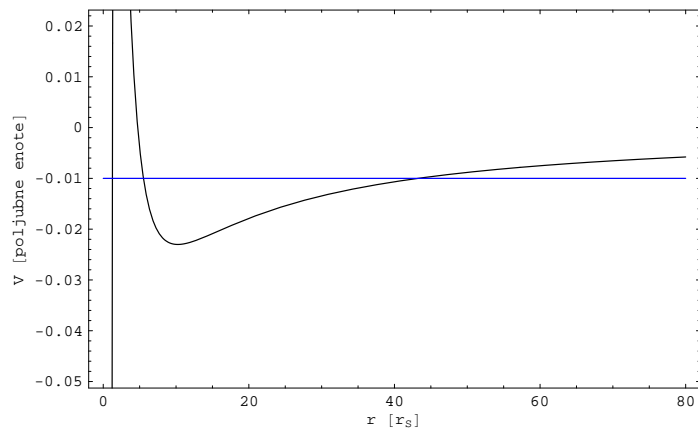
Sam numerični algoritem je identičen opisanemu za primer ničelnih geodetik s to razliko, da se enačba za izračun “polarnega” kota sedaj glasi

$$\begin{aligned}
 V(u, \mathcal{L}) &= \frac{1}{2}(-u + \mathcal{L}^2(u^2 - u^3)), \\
 \phi(u; \mathcal{E}, \mathcal{L}, u_1) &= \int_{u_1}^u \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{2}} (\mathcal{E} - V(w, \mathcal{L}))^{-1/2} dw.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

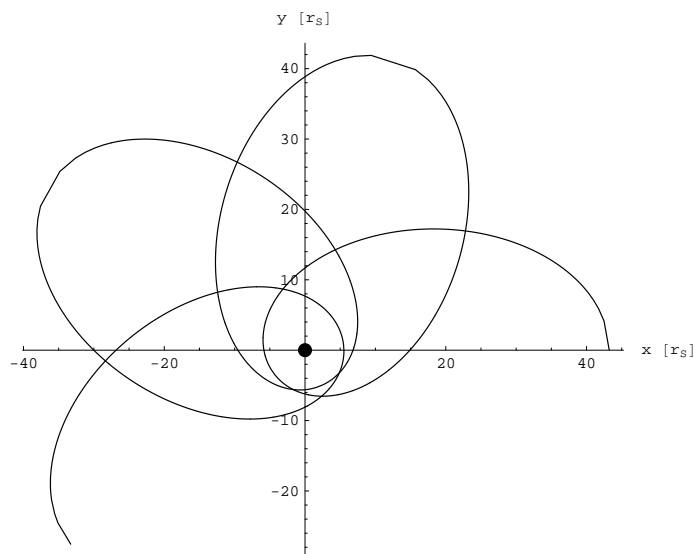
### 2.2.2 Vezane orbite

Vezane orbite imajo dve obračalni točki (periastron in apoastron), če narišemo na isti graf potek efektivnega potenciala in energije vidimo, da se sekata v treh točkah – dve od teh predstavljata omenjeni obračalni točki (nahajamo se v potencialnem “loncu”), slika (9).

Dodaten relativističen člen v efektivnem potencialu (2.17) povzroči, da vezane orbite precesirajo, slika (10).



**Slika 9:** Trajektorije določata efektivni potencial in energija (modro) ter (začetna) razdalja od izhodišča (črne luknje).



**Slika 10:** Orbita delca za zgornji primer potenciala in energije (vrednosti  $\mathcal{L}$  in  $\mathcal{E}$ ). Takoj opazimo precesijo, ki je značilna za ta tip orbit v splošni teoriji relativnosti.

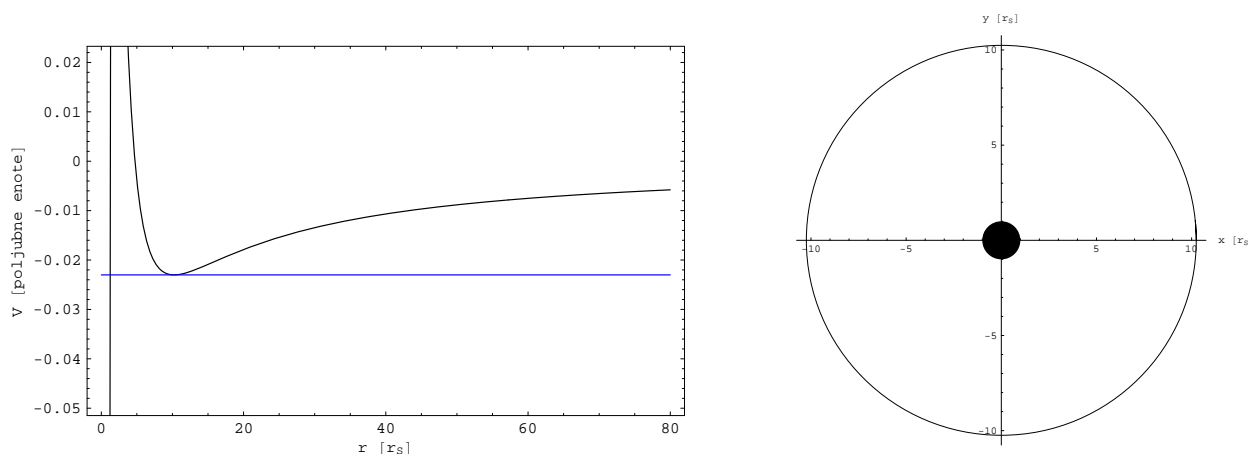
Za majhne vrednosti mase  $M$  je precesijska frekvenca dana kot (do najnižjega reda v  $M$ ) [2]

$$\omega_p \approx \frac{3(GM)^{3/2}}{c^2(1-e^2)a^{5/2}}, \quad (2.19)$$

kjer je tukaj  $e$  ekscentričnost in  $a$  velika polos orbite.

### 2.2.3 Stabilna krožna orbita

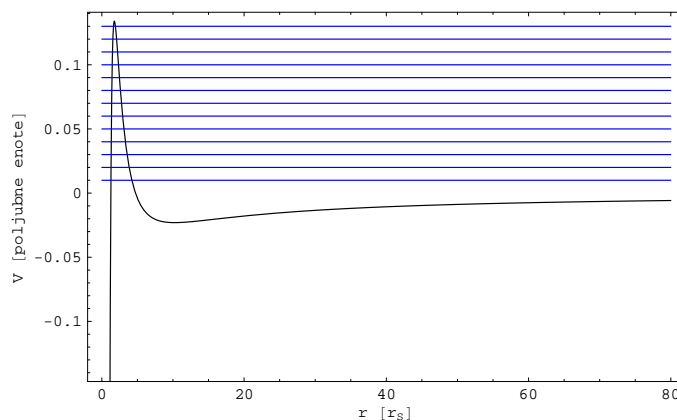
Limita vezanih orbit v minimumu potenciala je (stabilna) krožna orbita, saj tam velja  $\dot{r} = 0$ ; dve obračalni točki se izrodita v eno samo.



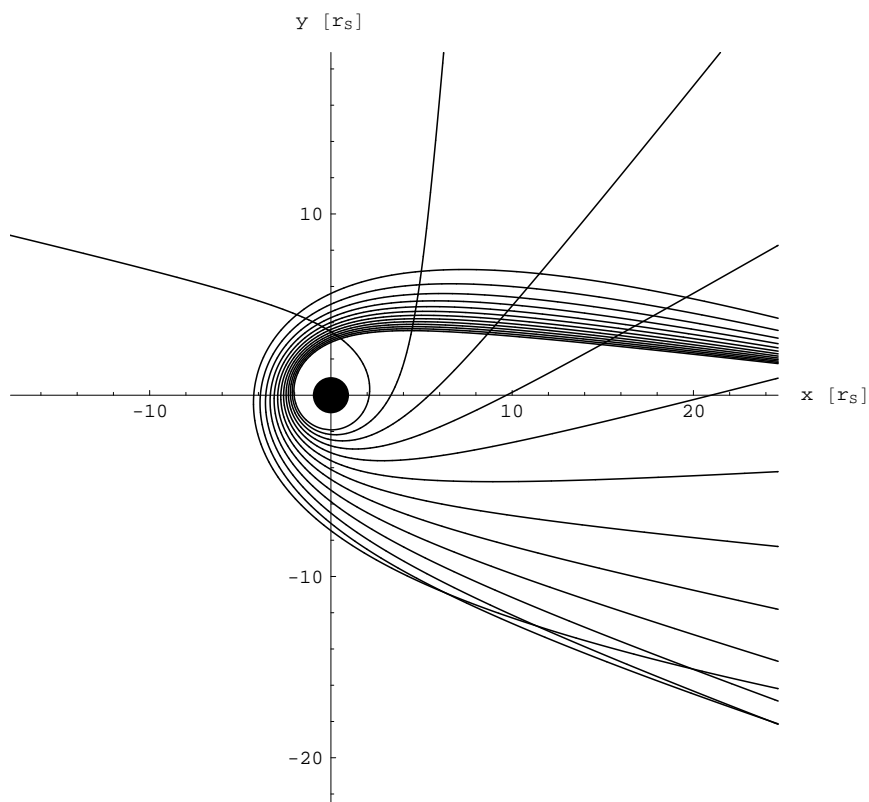
**Slika 11:** Stabilna krožna orbita v minimumu efektivnega potenciala.

### 2.2.4 Trajektorije z eno obračalno točko (sipanje)

Kadar je energija  $\mathcal{E}$  pozitivna in manjša od maksimuma potenciala dobimo za delce trajektorije z eno obračalno točko. Pri tem gre dejansko za sipanje delcev v bližini črne luknje.



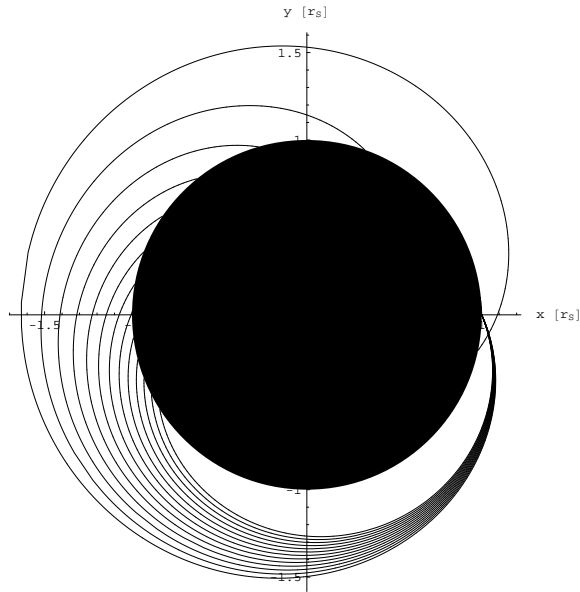
**Slika 12:** Za pozitivne energije ( $\mathcal{E} > 0$ ) in hkrati manjše od maksimuma potenciala dobimo trajektorije sipanja, glej še sliko (13). (Prikazane so energije pri katerih smo izračunali trajektorije)



**Slika 13:** Nekaj trajektorij sipanih delcev za različne vrednosti parametra  $\mathcal{E}$ , glej tudi sliko (12). ( $r_0 = 40$ )

### 2.2.5 Delci ki nastanejo v bližini $r \approx r_S$ in padejo v črno luknjo

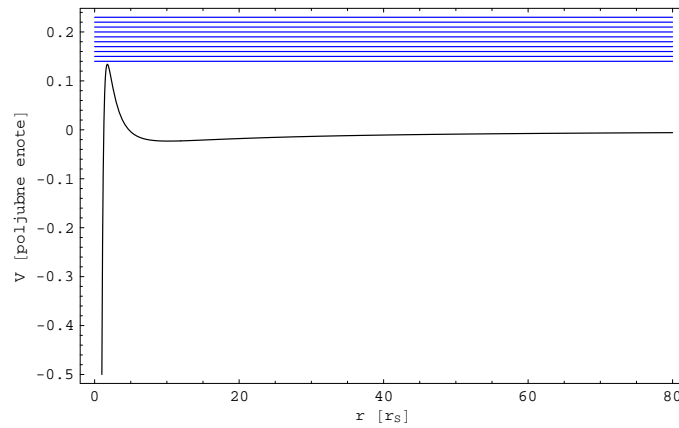
Za takšne delce je značilno, da imajo njihove trajektorije eno obračalno točko, na primer na sliki (9) je to prva (najbližja črni luknji) obračalna točka (tam kjer se sekata grafa za efektivni potencial in energijo). Dobimo podobne trajektorije kot že pri problemu ničelnih geodetk. Rezultate prikazuje slika (14).



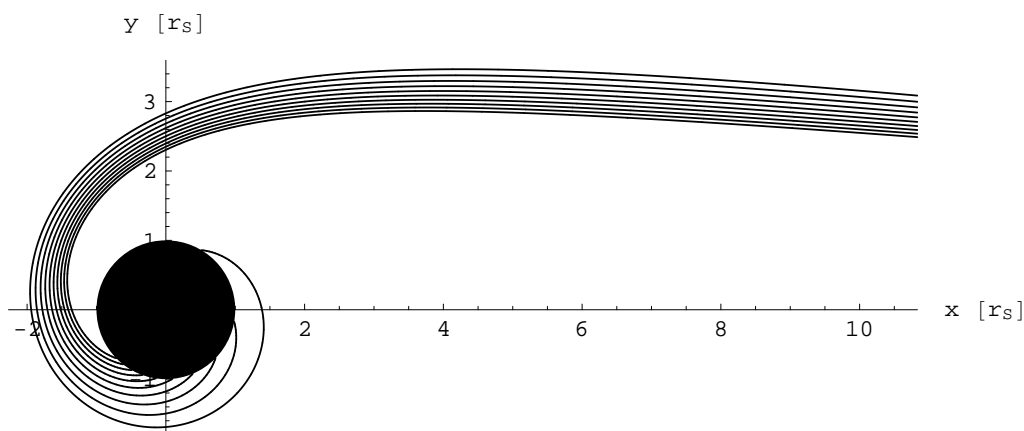
**Slika 14:** Vrednosti parametra  $\mathcal{E}$  so enake kot v primeru na sliki (12), obračalna točka za ta tip trajektorij je tista, ki je najbližje črni luknji.

### 2.2.6 Delci ki padejo v črno luknjo ( $\mathcal{E} > V_{eff}^{(max)}$ )

V to skupino spadajo vsi delci, ki imajo energijo večjo od maksimuma efektivnega potenciala, slika (15).



**Slika 15:** Za vrednosti parametra  $\mathcal{E}$  večje od maksimuma efektivnega potenciala dobimo trajektorije delcev, ki padejo v črno luknjo, slika (16).



**Slika 16:** Trajektorije delcev, ki padejo v črno luknjo (prestopijo potencialno oviro, ker imajo energijo  $\mathcal{E}$  večjo od maksimuma efektivnega potenciala). ( $r_0 = 40$ )

### 3 Zaključek

Preverili in izračunali smo ničelne in časovne geodetke v Schwarzschildovi metriki. Ugotovili smo, da lahko problem izračuna geodetk formuliramo kot problem izračuna trajektorij (hipotetičnih) delcev v efektivnem potencialu, ki je v dveh členih enak Keplerjevemu – tretji člen predstavlja dodaten privlačen del v bližini črne luknje, kar je povsem posledica splošne teorije relativnosti. Videli smo da moramo ločiti med seboj večje število različnih tipov trajektorij. Numerični izračun je potekal s pomočjo paketa *Mathematica*.

### Literatura

- [1] Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A., *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, San Francisco (1973).
- [2] Wald R. M., *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago (1984).
- [3] *Teorija gravitacije, zapiski s predavanj*