UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO

SAGNACOV POJAV

Alenka Bajec

Mentor: prof. dr. Andrej Čadež

29. november 2007

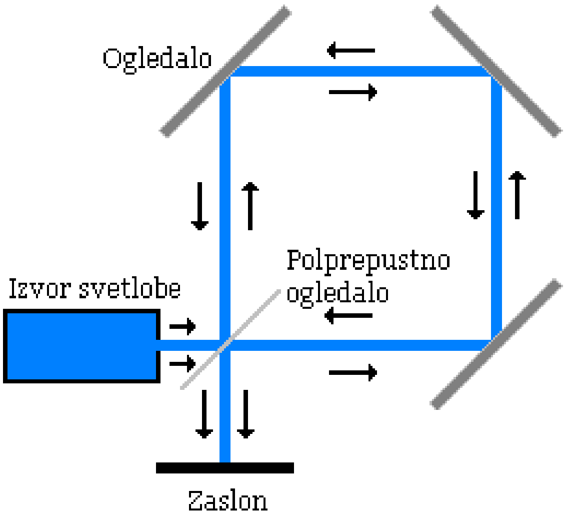
1 Naloga

Opiši Sagnacov pojav.

2 Uvod

Sagnacov efekt predstavlja relativni fazni zamik med dvema žarkoma svetlobe, ki v rotirajočem okvirju prepotujeta isto pot v različnih smereh, smeri urinega kazalca in smeri nasproti urinemu kazalcu glede na os vrtenja. Ta efekt se uporablja v modernih žiroskopih (Sagnacovi interferometri). V navigaciji jih uporabljajo kot merilce kotnih hitrosti z veliko natančnostjo, do približno 0.00001° na uro.

Sagnacov interferometer je predstavljen na sliki 1. Žarek s polprepustnim ogledalom razdelimo na dva dela, ki v nasprotnih smereh potujeta po isti poti. Ko se žarka na polprepustnem ogledalu spet združita, pride med njima do interference. Intenziteta interferenčnih prog je odvisna od kotne hitrosti naprave. Tak interferometer je možno narediti s tremi, štirimi ali več zrcali, prav tako pa se lahko za interferometer uporabijo optična vlakna.



Slika 1: Shematična predstavitev Sagnacovega interferometra.[1]

Sagnacov efekt je klasičen pojav, pri katerem ne gre za Dopplerjev efekt. Relativistično gledano bi ura v sistemu interferometra merila drugačen čas, a za enak faktor bi se spremenila tudi frekvenca žarka in izkaže se, da je fazna razlika obeh žarkov invariantna na izbiro koordinatnega sistema.

3 Izpeljava

V Sagnacovem interferometru se svetloba razdeli na dva žarka, eden potuje v smeri urinega kazalca (CW - clockwise), drugi v nasprotni smeri (CCW - counter-clockwise).

Zamislimo si interferometer s krožno potjo žarka. Celotna naprava se vrti (na primer v smeri CW), zato vhod/izhod naprave ni na točno istem mestu, kot v trenutku, ko je svetloba vstopila v napravo. Eden od žarkov (žarek, ki potuje v smeri CCW) prepotuje nekoliko krajšo pot od drugega.

Če naprava miruje, se žarka srečata po času

$$t = \frac{2\pi R}{c}, \tag{1}$$

kjer je R polmer interferometra, c pa hitrost svetlobe v vakuumu. Če se naprava vrti s kotno hitrostjo Ω, žarek, ki potuje v smer urinega kazalca, cilj doseže v času t_2, drugi žarek pa v času t_1. Časovni zamik med žarkoma je torej

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\pi R}{c - R\Omega} - \frac{2\pi R}{c + R\Omega} = \frac{4\pi R^2 \Omega}{c^2 - R^2\Omega^2}. \tag{2}$$

Pri nerelativističnih hitrostih velja $R^2\Omega^2 \ll c^2$, iz česar sledi

$$\Delta t = \frac{4\pi R^2 \Omega}{c^2}. \tag{3}$$

Fazni zamik je z razliko časov povezan z enačbo $\Delta\phi_0 = \omega_0 \Delta t$, kjer je ω_0 frekvenca svetlobe. Če zdaj uporabimo enačbo (3), dobimo

$$\Delta\phi_0 = \frac{4\pi R^2 \omega_0}{c^2}\Omega. \tag{4}$$

Intenziteta interferenčnega signala je odvisna od faznega zamika:

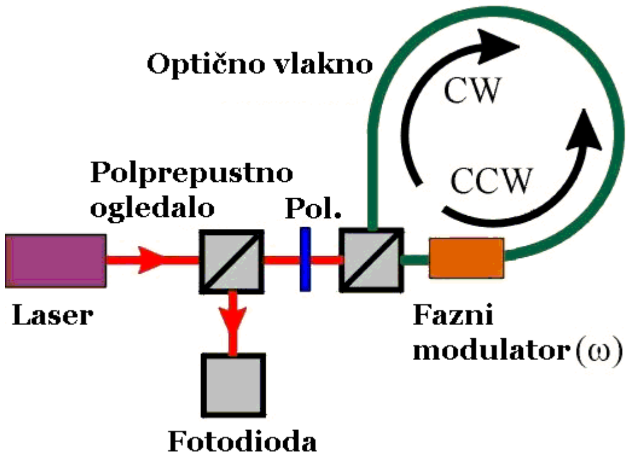
$$I = I_0 \left(\frac{1}{2} e^{i\frac{\Delta\phi_0}{2}} + \frac{1}{2} e^{-i\frac{\Delta\phi_0}{2}} \right)^2 = I_0 \cos^2 \frac{\Delta\phi_0}{2} = \frac{1}{2} I_0 (1 + \cos\Delta\phi_0). \tag{5}$$

I tu predstavlja intenziteto žarka, I_0 pa vrednost intenzitete v mirujočem stanju interferometra ($\Omega = 0$). Intenziteta je periodična funkcija faznega zamika med žarkoma, ki je kar sorazmerna kotni hitrosti interferometra.

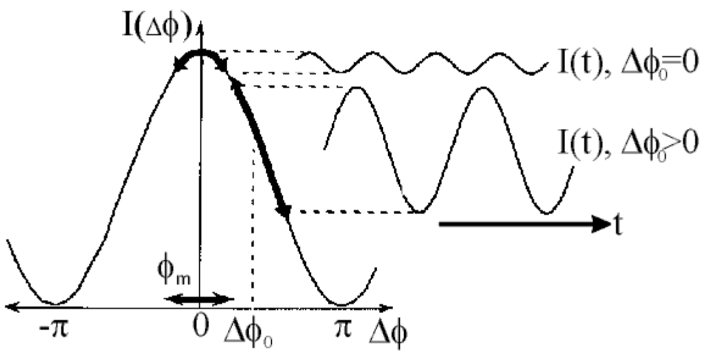
3.1 Fazni modulator

Rešitev (5) ne ločuje obratov v smeri urinega kazalca od obratov v nasprotni smeri urinega kazalca, intenziteta I je namreč soda funkcija kotne hitrosti Ω. Da bi interferometer ločil tudi smeri premikov, v krožno zanko dodamo še napravo, ki povzroča fazno modulacijo:

$$\phi(t) = \phi_m \sin(\omega t). \tag{6}$$



Slika 2: Shematični prikaz Sagnacovega interferometra.



Slika 3: Graf prikazuje odvisnost intenzitete od relativnega faznega zamika med žarkoma CW in CCW in vpliv fazne modulacije na intenziteto signala pri dveh različnih kotnih hitrostih interferometra.

Modulator se nahaja takoj za polprepustnim ogledalom (slika 2), tako žarek CW najprej potuje po krožni zanki, preden vstopi v modulator in ima zato glede na žarek CCW fazni zamik $\tau = n2\pi R/c$ (n tu predstavlja lomni količnik optičnega vlakna). Učinek modulatorja je največji, ko ima τ polštevilčno vrednost modulacije, na primer $\tau = \pi/\omega$. Takrat velja

$$\phi(t) = -\phi(t-\tau). \tag{7}$$

V tem primeru fazni zamik med obema žarkoma znaša

$$\Delta\phi = \Delta\phi_0 + 2\phi_m \sin(\omega t), \tag{8}$$

interferenčni signal pa zavzame obliko (slika 3):

$$I = \frac{1}{2} I_0 [1 + \cos(\Delta\phi_0 + 2\phi_m \sin(\omega t))]. \tag{9}$$

Intenziteto lahko razvijemo po harmonikih ω:

$$I = \frac{1}{2}[1 + J_0(2\phi_m)] - [\sin\Delta\phi_0 J_1(2\phi_m)]\sin\omega t + [\cos(\Delta\phi_0 J_2(2\phi_m)]\cos(2\omega t) + ... \tag{10}$$

J_0, J_1 in J_2 so Besselove funkcije prvega reda. Prvi harmonik signala je zdaj liha funkcija kotne hitrosti.

3.2 Vpliv oblike interferometra

V uvodu sem omenila nekaj različnih postavitev interferometra. Pričakovali bi lahko, da bodo rezultati nekoliko drugačni pri vsaki od postavitev, a izkaže se, da sama oblika interferometra ni zelo pomembna, pomembna pa je površina lika, ki ga svetlobna žarka zaobjemata. Časovni zamik med obema žarkoma je namreč sorazmeren površini interferometra. Kot dokaz lahko izpeljemo razliko med časi obeh žarkov, ko dosežeta izhod, za zanko v obliki poljubnega večkotnika včrtanega krogu. Koordinate dveh zapovrstnih ogledal pri kotu Θ med njima so

$$x_1 = R\cos\Omega t \quad y_1 = R\sin\Omega t \quad x_2 = R\cos(\Omega t + \Theta) \quad y_2 = R\sin(\Omega t + \Theta). \tag{11}$$

Pot svetlobe v času T od začetne lege prvega ogledala do končne lege drugega ogledala lahko opišemo z $(cT)^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$. S pomočjo izraženih koordinat v (11) lahko pridemo do enačbe

$$c^2T^2 = 2R^2[1 - \cos(\Omega T \pm \Theta)] = 2R^2[1 - \cos\Omega T\cos\Theta \pm \sin\Omega T\sin\Theta]. \tag{12}$$

Vrednost za ΩT je precej majhna, interferometer se namreč ne zavrti za zelo velik kot v času, ki ga svetloba porabi za pot med dvema ogledaloma, zato lahko enačbe do drugega reda razvijemo v Taylorjevo vrsto po ΩT in združimo člene z isto potenco T v

$$\left[c^2 - R^2\Omega^2\cos\Theta\right]T^2 \mp \left[2R^2\Omega\sin\Theta\right]T - 2R^2\left[1 - \cos\Theta\right] = 0. \tag{13}$$

Dva korena tega polinoma sta vrednosti za T, eden s pozitivnim in drugi z negativnim predznakom, vsak za eno od smeri žarka (CW in CCW). S kvadratno enačbo lahko vrednosti za T izrazimo in razlika med časoma je

$$|T_{\mathrm{CW}} - T_{\mathrm{CCW}}| = \Delta t = \frac{2R^2\Omega\sin\Theta}{c^2 - R^2\Omega^2\cos\Theta}. \tag{14}$$

Površina trikotnika, ki ga sestavljajo center interferometra in dve ogledali je $R^2\sin(\Theta)/2$. Vsak rob zanke interferometra, ki je vrisan v krog, doprinese $4A_i\Omega/(c^2 - v^2\cos\Theta)$ k celotni časovni razliki, kjer je A_i površina i-tega trikotnega izreza zanke, $v = R\Omega$ pa je tangencialna hitrost ogledal. Tako celotna časovna razlika med žarkom v smeri CW in tistim v smeri CCW znaša

$$\Delta t = \frac{4A\Omega}{c^2 - v^2 \cos\Theta}, \tag{15}$$

kjer A predstavlja celotno površino, ki jo zanka zajema. To velja za poligone s poljubnim številom stranic, vključno z limitnim primerom okrogle zanke, narejene s pomočjo optičnih vlaken. V tem primeru ogledala predstavljajo notranjo reflektivno plast, kot Θ pa gre na nič.[3]

4 Zaključek

Sagnacov efekt se uporablja v sodobnih tehnoloških rešitvah, kot npr. v inercijskem sistemu za vodenje. Poleg merilcev premih pospeškov se v njih uporabljajo tudi merilci kotnih pospeškov in hitrosti, za kar lahko uporabimo Sagnacove interferometre.

Sagnacov efekt prav tako prispeva k točnosti sistema globalnega določanja položaja (GPS - Global Positioning System). Princip za GPS je meritev razdalje ali območja med prejemnikom in sateliti. Sateliti nam sporočijo tudi, kje točno v svojih orbitah nad Zemljo se nahajajo. V meritvah je potrebno upoštevati Dopplerjeve premike, gravitacijske premike frekvenc in zamike zaradi časa potovanja informacije. Eden izmed teh efektov (Sagnacov zamik) je posledica vrtenja Zemlje med časom potovanja satelitskega signala od satelita do uporabnika. Velikost Sagnacovega efekta je v teh primerih lahko tudi do nekaj sto nanosekund.

Literatura

[1] Wikipedia, `www.wikipedia.org`, 2007

[2] A. Bauer, `http://www.physik.fu-berlin.de/~bauer/habil_online/node11.html`, 2000

[3] Math Pages, `http://www.mathpages.com/rr/s2-07/2-07.htm`, 2007

[4] *Global Positioning System*, `http://physics.syr.edu/courses/PHY312.03Spring/GPS/GPS.html`, 1998

[5] N. Ashby, *Relativity in the Global Positioning System*, `http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2003-1/title.html`, 2007