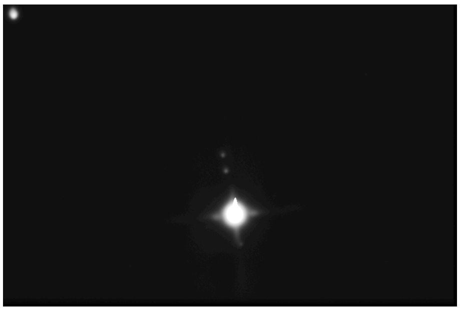
Univerza v Ljubljani,
Fakulteta za matematiko in fiziko

# PROJEKTNA NALOGA

# Masa Urana



*Avtorji:*

Marko Korpar
Janez Kos
Nika Košir

*Mentor:*

prof. Andrej Čadež

*Ljubljana, september 2007*

# Kazalo

**1 Uvod** **2**

**2 Kako smo opazovali** **2**

**3 Matematičen in fizikalni pristop k računanju** **3**
3.1 Keplerjevi zakoni . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3
3.2 Geometrija . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3
3.3 Matematični opis . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

**4 Od slike do izračuna** **5**
4.1 Merjenje na slikah . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5
4.2 Predpostavke . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6
4.3 Grafični prikaz meritev . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

**5 Izračun mase Urana** **9**

# 1 Uvod

Naša naloga je bila preko posnetkov Urana in njegovih satelitov določiti njegovo maso (privzamemo da so tirnice satelitov krožnice). Maso izračunamo s pomočjo Keplerjevega zakona, $t_0$ in r pa določimo iz posnetkov. Pomagamo si seveda tudi s samo geometrijo problema in prilagajanjem dobljenih podatkov.

Da smo lahko določili $t_0$ in r smo potrebovli vsaj tri zaporedne opazovalne noči. Snemali smo v nočeh 23, 25-27.7.2007, v torek 24.7 pa nam jo je vreme zagodlo, tako da opazovanje ni bilo možno.

Ker je Uran na posnetkih zelo svetel (na žalost celo presvetljen) njegove lune pa so precej temnejše, smo si pomagali s sekvenco posnetkov in jih kasneje povprečili. Tako smo lažje določili položaje satelitov na slikah, ne da bi se signal s planeta prelival v sosednje piksle.

# 2 Kako smo opazovali

Zaradi zelo vročih poletnih temperatur ponoči (zunaj je bilo okoli 25 stopinj) smo v ponedeljek čip hladili le na -14 stopinj. Na ponedeljkovih posnetkih sta vidni Umbriel in Titania.

Opazovalne razmere so se v sredo precej izboljšale, saj so nam dovoljevale hlajenje čipa na -18 stopinj. Nagajalo pa nam je drevje, ki raste pred observatorijem, ker je zakrivalo naše opazovalno polje in smo morali počakati, da je Uran vzšel izza dreves. Drugo sekvenco posnetkov smo naredili malo pred tretjo zjutraj. Vse posnetke pa smo naredili v V filtru.

V četrtek smo imeli težave s CCD kamero, saj se nam je med snemanjem večkrat izklopila. Čip smo hladili na -16 stopinj. Tokrat so bili posnetki v V filtru slabi (verjetno zaradi rahle oblačnosti), zato smo raje snemali v R filtru. Na posnetkih (tudi od prejšnjega dne) sta luni Oberon in Ariel.

V petek so se pojavile težave s sledenjem kupole, kar smo rešili z vklapljanjem in izklapljanjem sledenja le-te. Tudi tokrat smo snemali v R filtru zaradi boljših posnetkov. Na njih se poleg Ariela in Oberona pojavi tudi Titanija.

# 3 Matematičen in fizikalni pristop k računanju

## 3.1 Keplerjevi zakoni

Izpeljimo tretji Keplerjev zakon za navadno kroženje.

Gravitacijska sila med dvema telesoma je:

$$F = \frac{Mm}{r^2}\kappa$$

Sila je tudi:

$$F = ma$$

Pospešek $a$ pa je pri enakomernem kroženju kar $\omega^2 r$. Ko obe sili izenačimo, dobimo:

$$M\kappa = \omega^2 r^3$$

Ker je $\omega = \frac{2\pi}{t_0}$, smo dobili tretji Keplerjev zakon, ki pravi, da je razmerje $\frac{r^3}{t_0^2}$ konstanta za vsa telesa, ki krožijo okoli enake mase[1]. Za izračun mase planeta bomo torej potrebovali oddaljenost in obhodni čas ene od lun.

## 3.2 Geometrija

Iz skice razberemo sledeče zveze:

$$\frac{d}{r} = sin(\phi)$$

$$\frac{\phi_1}{360°} = \frac{t_1}{t_0}$$

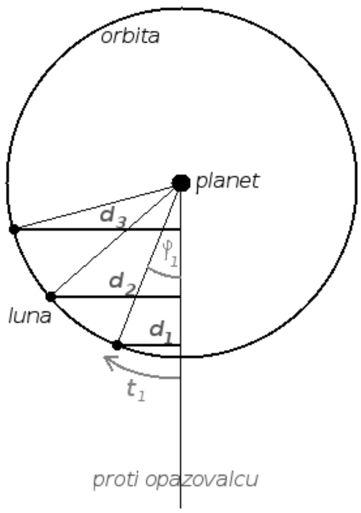
$$\frac{\phi_2}{360°} = \frac{t_2}{t_0}$$

$$\frac{\phi_3}{360°} = \frac{t_3}{t_0}$$

Pri zadnjih treh zvezah je $\phi$ kot med položajem, ko je luna poravnana s planetom in trenutnim položajem lune (glej skico), $t$ pa je čas, ki ga porabi luna da pride iz poravnane lege v lego pri kotu $\phi$.

Ker ponavadi merimo le čase med posameznimi legami (na primer pri kotu $\phi_1$ in $\phi_2$), poznamo le čase med temi legami. Označimo jih z $\Delta t_2$ in $\Delta t_3$ za čas od prve lege do druge in od druge do tretje.

[1] To se da posplošiti tudi na drugi keplerjev zakon, ki pravi, da je ploščinska hitrost na vseh mestih enaka.




Slika 1: Skica prikazuje izhodišče za izračun obhodnega časa. Zakaj smo privzeli, da je tirnica okrogla in da ležimo v ravnini kroženja lune, je opisano v poglavju 4.2.

Sedaj lahko zapišemo dve enačbi:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{sin(\frac{t_1}{t_0}2\pi)}{sin(\frac{t_1+\Delta t_2}{t_0}2\pi)}$$

$$\frac{d_2}{d_3} = \frac{sin(\frac{t_1+\Delta t_2}{t_0}2\pi)}{sin(\frac{t_1+\Delta t_2+\Delta t_3}{t_0}2\pi)}$$

Dobili smo sistem dveh enačb z dvema neznankama: $t_1$ in $t_0$

Ker je tak sistem rešljiv le numerično, smo poiskali še en enostavnejši način za rešitev problema, opisan v sledečem poglavju.

## 3.3 Matematični opis

Če opazujemo, kako se oddaljenost lune spreminja s časom in če poleg tega ležimo še v ravnini kroženja, v resnici vidimo (pri predpostavki, da smo na veliki oddaljenosti od planeta napram luni) najbolj običajno nihanje. Opišemo ga lahko kot:

$$f(x) = asin(bx + c)$$

To je čisto matematični zapis nihanja. Vsem oznakam lahko najdemo realne pojme. $a$ postane največja oddaljenost (torej tudi oddaljenost lune od planeta), $b$ je krožilna frekvenca ($\omega$). Iz nje izrazimo lahko obhodni čas kot:

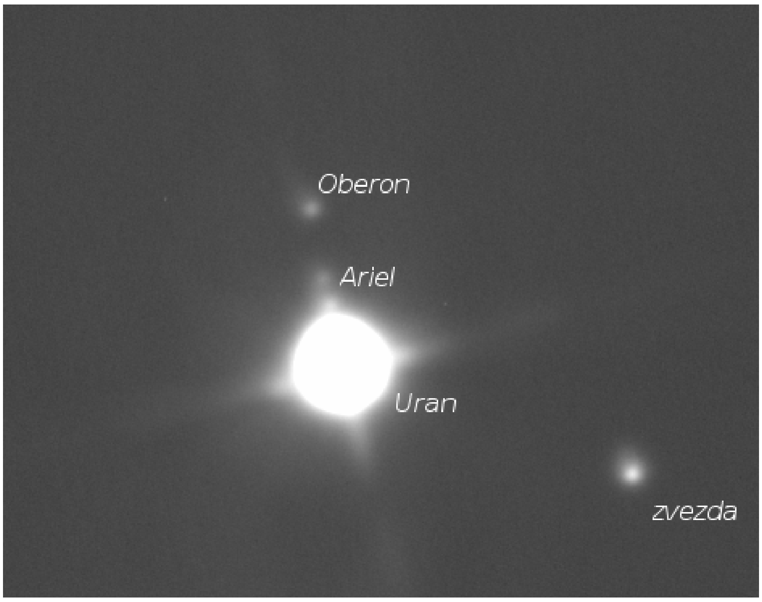
$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega}$$

$c$ je odvisen le od tega, kako smo merili čas.

Našli smo torej najlažji način za določitev vseh elementov, ki jih potrebujemo za izračun mase planeta. Seveda pa je potrebno poudariti, da brez poznavanja oddaljenosti planeta od nas, oddaljenosti lune od planeta ne moremo absolutno določiti.

# 4 Od slike do izračuna

## 4.1 Merjenje na slikah




Slika 2: Primer slike, pripravljene za meritev. Posneto dne 25. 8. 2007

Iz obdelanih slik smo izrezali območje okoli planeta, ker nas zanima le to. Na sliki 2 vidimo, kakšen je običajen izgled slike z označenimi telesi. Velika krogla na sredini je Uran, manjše pikice okoli njega, poravnane na eni premici, pa so lune. Pri identifikaciji lun smo si pomagali z efemeridami.

Koordinate Centra Urana in lun smo dobili s programom `IRAF`. Uporabili smo paket `daophot` in ukaz `daofind`. Na sliki smo izmerili FWHM[2], signal ozadja in standardno deviacijo ozadja. To smo potrebovali, da smo lahko uredili parametre, potrebne da nam ukaz `daofind` najde zvezde (v našem primeru lune in center Urana). Iskanje zvezd smo zagnali dvakrat, saj imajo

[2]Full Width at Half Maximum — širina profila zvezde na polovični višini profila

Uran in lune različen FWHM. Metoda je bila nastavljena tako, da je obliki lune in Urana prilagajala centroid.

Rezultat iskanja zvezd se nam izpiše tudi na zaslonu. Prebrali smo koordinate lun in koordinato centra Urana in iz tega po enostavni formuli:

$$d = \sqrt{(x_{luna} - x_{Uran})^2 + (y_{luna} - y_{Uran})^2}$$

Izračunali razdaljo luna–Uran.

Čas posnetka smo prebrali iz headerja[3] slike.

V naslednji tabeli so zbrane vsi časi ter razdalje:

| Posnetek | Čas | $\Delta$ t | Uran–Oberon | Uran–Ariel |
|---|---|---|---|---|
| 25-1 | 22:48 | 0 | 90.91±1.62 | 52.02±1.63 |
| 25-2 | 00:43 | 115 | 96.11±1.54 | 54.11±1.82 |
| 26-1 | 23:32 | 1331 | 120.50±1.34 | 81.62±1.63 |
| 26-2 | 01:05 | 1424 | 127.18±1.73 | 87.00±1.47 |
| 27-1 | 23:38 | 2777 | 120.97±1.49 | neznano |
| 27-2 | 01:21 | 2880 | 121.89±1.50 | neznano |

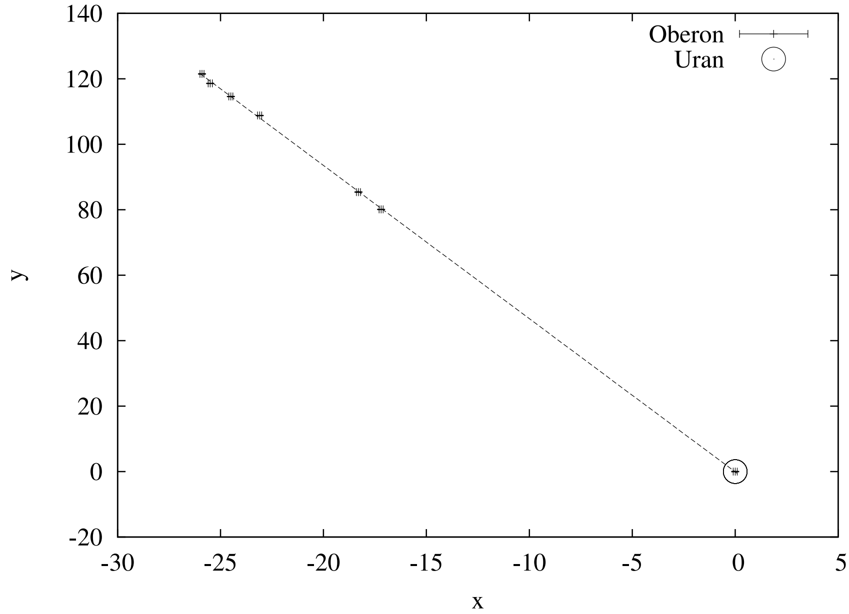
V prvem stolpcu je ime slike (prva številka pomeni dan, ko smo snemali, druga pa zaporedni posnetek v tisti noči). V drugem stolpcu je čas posnetka (ura:minute), v tretjem pretečen čas od prvega posnetka v minutah. V četrtem in petem stolpcu so razdalje med lunama in Uranom, podane v pikslih.

Ker je Oberon edina luna, ki smo ji lahko na vseh slikah izmerili oddaljenost, smo se pri izračunu posvetili le njej.

## 4.2 Predpostavke

V nadaljevanju bomo predpostavili, da opazovalec leži v ravnini tirnice oberona in da je tirnica okrogla. Da ležimo v isti ravnini kot tirnica, lahko preverimo iz posnetkov. Če to drži, se spreminja le oddaljenost lune od planeta, ne pa tudi pozicijski kot. To prikazuje slika 3. Ker ležita luna in Uran vedno na isti premici, lahko zaključimo, da je inklinacija orbite res 90 stopinj, torej da jo gledamo z roba. Da je tirnica okrogla je iz narejenih posnetkov nemogoče ugotoviti. Potrebovali bi več opazovanj. Če bi se razdalja med planetom in luno spreminjala sinusno, bi zaključili, da je tirnica okrogla. Za to bi potrebovali opazovanje vsaj enega obhoda lune, kar pa traja 13.5 dni. Tako smo zgolj predpostavili, da je orbita okrogla. Natančne meritve sicer dajo za ekscentričnost orbite 0.0014, kar je za naše potrebe dovolj podobno krogu.

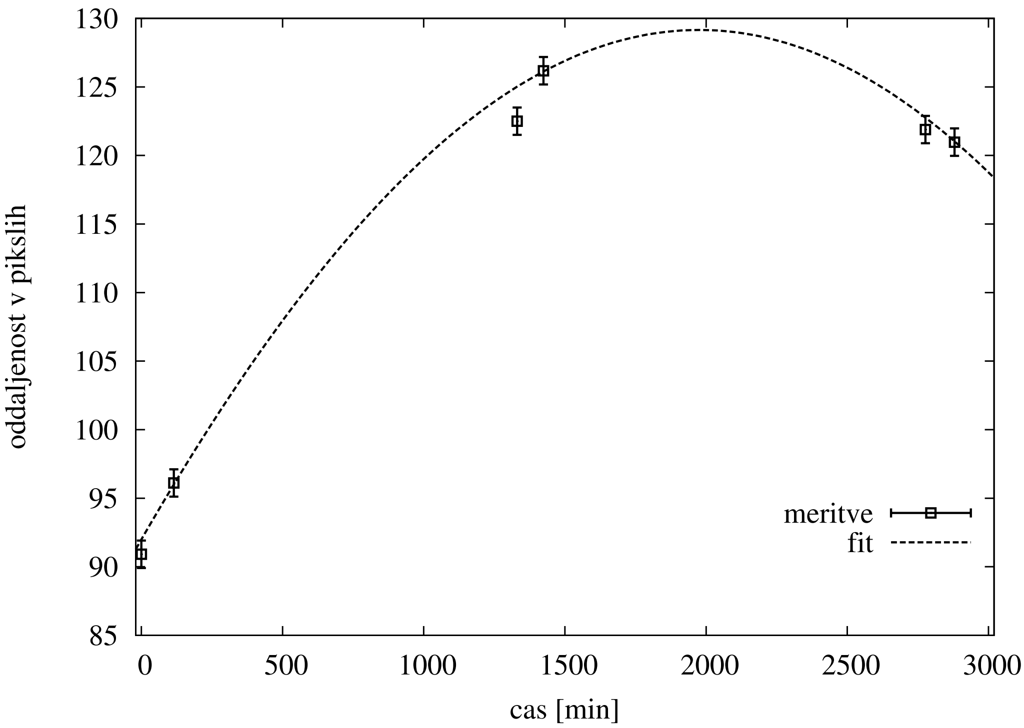
[3] Lastnosti ter podatki o sliki, zapisani k sliki sami




Slika 3: Slika prikazuje pozicije lune Oberon glede na Uran. Uran je v izhodišču. Enota je enaka pikslu na sliki. Vidimo, da pozicije lun ležijo na premici, ki gre skozi ishodišče.

Obe predpostavki bi težko naredili brez poznavanja pravih podatkov. Planeti ne krožijo točno v ravnini ekliptike, prav tako niso z ekliptiko poravnane orbite lun. Imeli smo srečo, saj je bila ravnina, v kateri krožijo Uranove lune poravnana z Zemljo prav v času opazovanja. Ta predpostavka je še posebej pomembna pri Uranu, saj ima vrtilno os nagnjeno za okoli 90 stopnj glede na ekliptiko, kar pomeni, da moramo biti previdni, ko predpostavimo, da so orbite lun poravnane z ekliptiko. Ko imajo vektorji vrtilne količine različne smeri, planet in Sonce delujeta z navorom na luno in lahko njeno vrtilno os in os kroženja lune zasučeta.

Tudi predpostavka o krožnih orbitah ne drži vedno. Velja pa, da se zaradi plimskih sil orbite sčasoma preoblikujejo v krožne. Čas, v katerem se to zgodi je odvisen od mas in razdalj med luno in planetom. Ker je Osončje staro 5 milijard let in so verjetno tudi večje lune stare vsaj nekaj milijard let, drži, da so orbite vseh večjih lun v Osončju skoraj krožnice. To ne velja za manjše lune, predvsem za ujete asteroide.




Slika 4: Graf prikazuje, kako se je izmerjena oddaljenost Oberona od Urana spreminjala tekom snemanja. Pikčasta črta prikazuje najboljše prileganje sinusa na te meritve.

## 4.3 Grafični prikaz meritev

Kako se je spreminjala oddaljenost, lahko najlažje prikažemo na grafu. Na absciso smo nanašali pretečen čas od prvega posnetka v minutah, na ordinato pa razdaljo med luno in Uranom v pikslih (Slika 4).

Sinusno krivuljo smo fitali s programom Gnuplot[4]. Prilagojena krivulja ima enačbo:

$$f(x) = a \cdot sin(b \cdot x + c)$$

pri čemer imajo parametri vrednosti:

$$a = 126.3 \pm 2.4$$

$$b = 0.000351 \pm 0.0000092$$

$$c = 1050.1 \pm 12.9$$

[4]Gnuplot uporablja za prilagajanje metodo nelinearnih najmanjših kvadratov z Marquardt-Levenbergovim algoritmom.

Parameter $a$ predstavlja relativno oddaljenost lune, $b$ je krožna frekvenca lune ($\omega$), $c$ je brezpomenski, saj je odvisen le od tega, kdaj smo začeli šteti čas. Predstavlja torej časovni zamik.

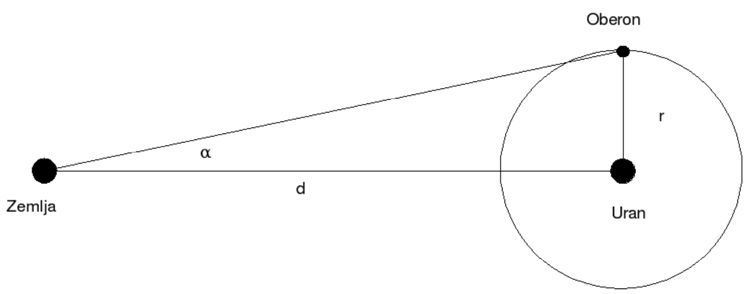
# 5 Izračun mase Urana

Za izračun mase Urana bomo potrebovali oddaljenost Oberona od Urana. To prebermo iz grafa (slika 4), kjer je na ordinati podana razdalja med Oberonom in Uranom v pikslih, oziroma nam jo vrne Gnuplot kot parameter $a$ pri enačbi za fitano sinusno krivuljo;

$$a = 126.3 \pm 2.4 \; piksle$$

Sedaj pa moramo razdaljo iz pikslov pretvoriti v metre. Na internetni strani observatorija na Golovcu smo dobili podatek kakšen kot predstavlja en piksel:

$$1piksel = 0,3''$$




Slika 5: Skica prikazuje izhodišče za izračun oddaljenosti Oberona od Urana. Kjer je $d$ razdalja med Zemljo in Uranom, $r$ je razdalja med satelitom in planetom, $\alpha$ pa kot ki ga predstavlja izmerjena razdalja $a$.

Iz tega dobimo kot $\alpha$ (glej sliko 5):

$$\alpha = a0,3'' = 37,89'' \pm 0.72''$$

Razdaljo med Zemljo in Uranom smo prebrali iz programa SkyMap in znaša:

$$d = 19,38a.e.$$

oziroma

$$d = 2,9 \cdot 10^{12} m$$

S pomočjo geometrije in slike 5 pridemo do enačbe za razdaljo $r$:

$$r = sin(\alpha)d$$

$$r = 5,33 \cdot 10^8\ m\ \ \pm 0.10\ m$$

Sedaj nam manjka le še krožna frekvenca Oberona. Tako kot prej nam jo je izračunal Gnuplot na podlagi fita sinusne krivulje na naše podatke, kot parameter $b$:

$$\omega = 0,000351 min^{-1}$$

Za nadalnje računanje bo potrebno pretvoriti $\omega$ v $s^{-1}$:

$$\omega = 5,85 \cdot 10^{-6}\ s^{-1}\ \ \pm 0.15 \cdot 10^{-6}\ s^{-1}$$

Za izračun mase uporabimo že zapisano enačbo:

$$M\kappa = \omega^2 r^3$$

$\kappa$ je gravitacijska konstanta in znaša:

$$\kappa = 6,6710^{-11} \frac{m^3}{kgs^2}$$

Z zgoraj izračunanima $\omega$ in $r$ dobimo maso Urana;

$$M = 7,99 \cdot 10^{25}\ kg \pm 0.87 \cdot 10^{25}\ kg$$

Če to primerjamo z uradnimi podatki za maso Urana, ki so $8.68 \cdot 10^{25}\ kg$, vidimo, da je naša meritev znotraj ocenjene napake dobra.

Meritev bi se dalo izboljšati z daljšo dobo opazovanja, tako da bi posneli večji del orbite lune okoli planeta in s kamero z večjim dinamičnim razponom, da bi lahko imele lune več signala brez bojazni prelivanja signala iz planeta. To je tudi glavni razlog za napake v meritvi pozicije lun.