TEORIJA GRAVITACIJE

Schwarzschildova geometrija v Novikovih koordinatah

Marko Mravlak

1 Naloga

Izberi časovno simetrično 3-geometrijo za začetno geometrijo Schwarzschildske črne luknje in nadaljuj foliacijo prostor časa v prosto padajočih koordinatah. Pokaži, da dobiš metriko Novikova.

2 Uvod

Za začetno geometrijo izberemo časovno simetrično 3-geometrijo Schwarzschildske črne luknje. Za geometrijo reza pri foliaciji pravimo, da je časovno-simetrična, če je njena zunanja ukrivljenost glede na folijo, v kateri se nahaja, enaka 0 [1, p. 535][2]. Schwarzschildova geometrija v Schwarzschildovih koordinatah (t, r, θ, ϕ) je časovno simetrična:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \ . \tag{1}$$

Izpeljali smo jo namreč s foliacijo, kjer smo prostor čas narezali na časovno neodvisne folije. Ena izmed dinamičnih Einsteinovih enačb v ADM formalizmu povezuje tenzor zunanje ukrivljenosti z časovnim odvodom 3-metričnega tenzorja γ_{ij}

$$\frac{\partial}{\partial t}\gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} \ ,$$

kjer je α t.i. *lapse* funkcija, katere vrednost je različna od 0. Od tod sledi, da je tenzor zunanje ukrivljenosti enak 0.

3 Definicija koordinatnega sistema

Invariantni interval v Schwarzschildovi geometriji (1) smo zapisali s Schwarzshildovima koordinatama t in r. t predstavlja čas kot ga izmeri stacionarna ura v neskončnosti, r pa je radialna koordinata, ki jo izmerimo kot obseg kroga s središčem na zvezdi, deljenim z 2π.

Novikov koordinatni sistem je povezan s trajektorijami in časi prosto padajočih ur. Definiramo[1] [1, 2, 3] ga s pomočjo skupine ur, ki prosto padajo od nekega maksimalnega radija r_m proti $r = 0$, kjer je r_m za posamezne ure različen. Vse ure začnejo padati ob istem Schwarzschildovem času t_0, pri tem so ure sinhronizirane tako, da pri svojem maksimalnem radiju r_m vse pokažejo čas 0. Novikovo prostorsko koordinato r^* definiramo tako, da ostane konstantna vzdolž trajektorije vsake izmed ur, medtem ko za Novikovo časovno koordinato vzamemo čas, ki ga kaže posamezna ura τ. Predstavljamo si lahko, da ob času $\tau = 0$ vsi opazovalci začnejo prosto padati, medtem ko njihova radialna koordinata r^* ostaja ves čas enaka.

Množica Novikovih radialno gibajočih geodetskih ur predstavlja referenčni sistem, torej množico fizikalnih objektov, s katerimi lahko direktno opravimo meritve. V naslednjih poglavjih bomo predstavili referenčni sistem geodetskih ur in ga skonstruirali po metodi Novikova.

4 Koordinatna transformacija

Ker je naša metrika sferično simetrična in so kotne koordinate enake v obeh koordinatnih sistemih, bomo od sedaj naprej izpuščali kotni del metrike. Pravtako bomo izbrali geometriziran sistem enot: $c = G = 1$. Z $r_s = 2M$ označimo radij črne luknje z maso M (Schwarzschildov radij). Tako lahko enačbo (1) zapišemo v obliki:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 \ . \tag{2}$$

[1]Ponekod so Novikove koordinate definirane s pomočjo hipotetičnega parallelnega območja Schwarzschildove rešitve, znanega kot *bela luknja*.

4.1 Geodetke v Schwarzschildovi geometriji

Geodetke so krivulje po katerih potujejo prosti delci v prostor času. Zapišimo Lagranževo funkcijo za prosti delec

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} \ , \tag{3}$$

kjer za parameter krivulje izberemo lastni čas

$$\dot{x}^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = u^{\mu} \ . \tag{4}$$

V Lagranževo funkcijo vstavimo Schwarzschildovo metriko (2) ter uporabimo Euler-Lagranževe enačbe:

$$\mathcal{L} = -\frac{m}{2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 \ , \tag{5}$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} = 0 \ , \tag{6}$$

od koder za $\mu = 0$ dobimo konstanto gibanja

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} \right] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} = a \ , \tag{7}$$

kjer smo z a označili konstanto.

Zanimajo nas časovne geodetke, zato lahko zapišemo: $ds^2 = -d\tau^2$. Z upoštevanjem tega, konstante gibanja (7) ter relacije $\frac{dt}{dr} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tau}{dr}$ sledi iz enačbe (2) rešitev radialne enačbe geodetke oz. enačba orbite testnih delcev:

$$\left(\frac{d\tau}{dr} \right)^2 = \frac{1}{a^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} \ . \tag{8}$$

Maksimalen radij na takšni orbiti je pri $(dr/d\tau = 0)$

$$r_m = \frac{r_s}{1 - a^2} \ . \tag{9}$$

Z upoštevanjem definicije (9) in relacije $\frac{dt}{dr} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tau}{dr}$ zapišimo oba izraza, ki ju bomo kasneje uporabili:

$$\frac{d\tau}{dr} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{r_s}{r} - \frac{r_s}{r_m}}} \ , \tag{10}$$

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\varepsilon \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_m}}}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \sqrt{\frac{r_s}{r} - \frac{r_s}{r_m}}} \ , \tag{11}$$

kjer je ε enak $+1$ ali -1, odvisno od smeri delca. Za padajoče delce izberemo $\varepsilon = -1$.

4.2 Novikova časovna koordinata

Najprej bomo naredili transformacijo med koordinatami (r,t) in (r,τ). Iz enačb (10) in (11) lahko ob predpostavki, da poznamo t in r, izračunamo relacijo $d\tau(dt,dr)$:

$$d\tau = \left(1-\frac{r_s}{r_m}\right)^{1/2} dt + \frac{\left(\frac{r_s}{r}-\frac{r_s}{r_m}\right)^{1/2}}{1-\frac{r_s}{r}} dr \; . \tag{12}$$

Izraz (12) lahko integriramo med mejama r in r_m ter pri tem upoštevamo Novikov pogoj, da vse koordinatne ure dosežejo svoj maksimum ob enakem Schwarzschildovem času t_0: $t_{0i}=t_0$. Takrat vse ure kažejo nič: $\tau_{0i}=0$. S tem dobimo enačbo transformacije koordinate

$$\tau = \left(1-\frac{r_s}{r_m}\right)^{1/2} (t-t_0) + \int_{r_m}^{r} \frac{\left(\frac{r_s}{y}-\frac{r_s}{r_m}\right)^{1/2}}{1-\frac{r_s}{y}} dy \; . \tag{13}$$

Maksimalni radij r_m, ki nastopa v zgornji enačbi, je funkcija r in τ. Njihovo odvisnost lahko izrazimo implicitno iz enačbe (10) kot

$$\tau = -f(r,r_m) \; , \tag{14}$$

kjer je

$$f(r,r_m) = \int_{r_m}^{r} \frac{dy}{\sqrt{\frac{r_s}{y}-\frac{r_s}{r_m}}} \tag{15}$$

$$= -\left[\frac{r r_m}{r_s}(r_m-r)\right]^{1/2} - \frac{r_m^{3/2}}{\sqrt{r_s}} \arccos\left[\left(\frac{r}{r_m}\right)^{1/2}\right] \; . \tag{16}$$

Postopek integracije je zapisan v dodatku A.

Sedaj lahko v enačbi (2) z uporabo (12) eliminiramo koordinato t, dobimo:

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{1}{1-\frac{r_s}{r_m}} \left[-dr - \left(\frac{r_s}{r}-\frac{r_s}{r_m}\right)^{1/2} d\tau\right]^2 \; . \tag{17}$$

4.3 Novikova radialna koordinata

Za radialno koordinato izberemo maksimalni Schwarzschildov radij r_m, ki ostane konstanten ves čas gibanja koordinatne ure po njeni svetovnici. Uporabimo diferencial enačbe (14), kamor vstavimo (10) in dobimo

$$-\,dr - \left(\frac{r_s}{r} - \frac{r_s}{r_m}\right)^{1/2} d\tau = \left(\frac{r_s}{r} - \frac{r_s}{r_m}\right)^{1/2} \frac{\partial f}{\partial r_m} dr_m \; . \tag{18}$$

S to enačbo lahko sedaj v (17) eliminiramo še preostalo Schwrazschildovo koordinato r:

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{[g(r, r_m)]^2}{1 - \frac{r_s}{r_m}} dr_m^2 \; . \tag{19}$$

V zgornji enačbi smo z $g(r, r_m)$ označili naslednjo funkcijo

$$\begin{aligned} g(r, r_m) &= -\left(\frac{r_s}{r} - \frac{r_s}{r_m}\right)^{1/2} \frac{\partial f}{\partial r_m} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r}{r_m}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{r_m}{r} - 1\right)^{1/2}\left[\sin^{-1}\left(\frac{2r}{r_m} - 1\right) - \frac{\pi}{2}\right] \; . \end{aligned} \tag{20}$$

Tukaj r ni več radialna koordinata, ampak jo moramo obravnavati kot funkcijo koordinat r_m in τ, katerih povezava je podana z implicitnim izrazom (14).

4.4 Metrika Novikova

Z uvedbo koordinate r_m se je metrika iz nediagonalne oblike v (17) zopet spremenila v diagonalno v (19). Metrika bo ohranila diagonalno obliko tudi, če nadomestimo koordinato r_m z novo koordinato r^*, ki je le funkcijo povezana z r_m, tako da velja: $dr^* = (dr^*/dr_m)dr_m$. Novikov tako vpelje dodatno koordinato r^*, ki je monotono povezana z r_m:

$$r^* = \left(\frac{r_m}{r_s} - 1\right)^{1/2} \; . \tag{21}$$

Tako lahko metriko zapišemo v novih koordinatah kot

$$ds^2 = -d\tau^2 + 4r_s^2\left(r^{*2} + 1\right)[g(r, r^*)]^2\, dr^{*2} \; . \tag{22}$$

Pokažemo lahko tudi, da velja zveza

$$4Mg(r, r^*) = \frac{1}{r^*}\frac{\partial r}{\partial r^*} \; . \tag{23}$$

Z uporabo tega odvoda, lahko Schwarzschildovo geometrijo v koordinatah Novikova zapišemo v obliki kot jo najdemo v literaturi [1, p. 826][2, p. 173]:

$$ds^2 = -d\tau^2 + \left(\frac{r^{*2}+1}{r^{*2}}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial r^*}\right)^2 dr^{*2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \ , \tag{24}$$

kjer smo zapisali še nespremenjeni kotni del.

4.5 Zaključek

Zapišimo še implicitno zvezo med Schwarzschildovimi in Novikovimi koordinatami, $r = (\tau, r^*)$, ki jo dobimo iz enačb (14) in (16):

$$\tau = r_s\left(r^{*2}+1\right)\left[\frac{r}{r_s} - \frac{(r^2/r_s)^2}{r^{*2}+1}\right]^{1/2} + r_s\left(r^{*2}+1\right)^{3/2}\arccos\left[\left(\frac{r/r_s}{r^{*2}+1}\right)^{1/2}\right] \ . \tag{25}$$

Zvezo s Schwarzschildovim časom, $t = (\tau, r^*)$, dobimo z integriranjem enačbe (11) po postopku, ki je analogen opisanemu v dodatku A:

$$t = \frac{r^*}{\sqrt{r^{*2}+1}} r_s (r^{*2}+1)^{3/2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{r}{r_s(r^{*2}+1)}\left(1 - \frac{r}{r_s(r^{*2}+1)}\right)\right]^{1/2} + \left(\frac{1}{r^{*2}+1} + \frac{1}{2}\right)\left[\arccos\left(\frac{r}{r_s(r^{*2}+1)}\right)^{1/2} - \frac{\pi}{2}\right] - \frac{i}{r^*(r^{*2}+1)}\arctan\left(\frac{1-\frac{r_s}{r}(r^{*2}+1)}{r^{*2}}\right)^{1/2}\right\} .$$

Schwarzschildovi koordinati smo označevali z (t, r) in Novikovi z (τ, r^*).

Koordinatne linije $r^* = \text{const}$ v Novikovem diagramu $\tau(r^*)$ (slika 1) predstavljajo svetovnice prosto padajočih opazovalcev. Ker ima Schwarzschildova geometrija v Schwarzschildovih koordinatah singularnost pri $r = r_s$, svetovnic delcev in svetlobe ne moremo nadaljevati znotraj radija r_s. V Novikovem koordinatnem sistemu smo Schwarzshildovo metriko zapisali v obliki (24), ki je regularna pri $r = r_s$ in nam tako omogoča, da geodetkam v koordinatah (r^*, τ) sledimo tudi znotraj Schwarzschildovega radija r_s, vse do $r^* = 0$.

Čeprav so Novikove koordinate konceptualno enostavne, ima Schwarzschildova metrika v Novikovih koordinatah zapleteno matematično obliko.

Schwarzschildova geometrija opisana z Novikovimi koordinatami je posebej zanimiva tudi zato, ker so metrični koeficienti časovno odvisni, čeprav je prostor čas statičen. Ta analitična rešitev zato omogoča tudi testiranje numeričnih rešitev foliacije prostor časa, kjer je metrični tenzor odvisen od časa.

Literatura

[1] Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A., *Gravitation*, 1973.

[2] Čadež, A., *Teorija gravitacije*, 2010.

[3] Gautreau, R., Il nuovo cimento **56 B** (1980) 49.

[4] Cook, G. B., Living Reviews in Relativity **3** (2000).

A Izračun integrala

Za izračun nedoločenega integrala iz (15) uvedemo novo spremenljivko t:

$$\begin{aligned} y &= r_m \cos^2 t \ , \\ dy &= -2 r_m \cos t \sin t dt \ . \end{aligned}$$

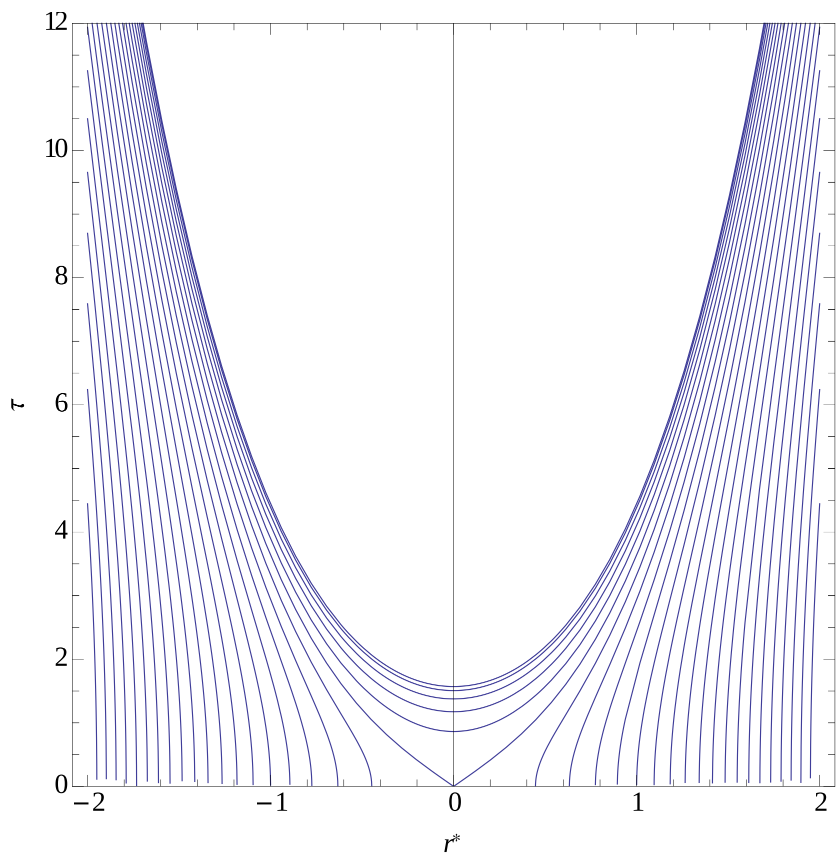
f lahko sedaj izračunamo po naslednjem postopku

$$\begin{aligned}
f &= \int \left(\frac{r_s}{y} - \frac{r_s}{r_m} \right)^{-1/2} dy = -\int \left(\frac{r_s}{r_m \cos^2 t} - \frac{r_s}{r_m} \right)^{-1/2} 2 r_m \cos t \sin t dt \\
&= -2 \frac{r_m^{3/2}}{r_s^{1/2}} \int \left(\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t} \right)^{-1/2} \sin t \cos t dt = -2 \frac{r_m^{3/2}}{r_s^{1/2}} \int \cos^2(t) dt \\
&= -2 \frac{r_m^{3/2}}{r_s^{1/2}} \int \frac{1}{2} \left(1 + \cos 2t \right) dt = -\frac{r_m^{3/2}}{r_s^{1/2}} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \\
&= -\frac{r_m^{3/2}}{r_s^{1/2}} \left\{ \arccos \left(\frac{y}{r_m} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \sin \left[2 \arccos \left(\frac{y}{r_m} \right)^{1/2} \right] \right\} \\
&= -\frac{r_m^{3/2}}{r_s^{1/2}} \left\{ \arccos \left(\frac{y}{r_m} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} 2 \sin \left[\arccos \left(\frac{y}{r_m} \right)^{1/2} \right] \cos \left[\arccos \left(\frac{y}{r_m} \right)^{1/2} \right] \right\} \\
&= -\frac{r_m^{3/2}}{r_s^{1/2}} \left\{ \arccos \left(\frac{y}{r_m} \right)^{1/2} + \left(\frac{y}{r_m} \right)^{1/2} \left(1 - \cos^2 \left[\arccos \left(\frac{y}{r_m} \right)^{1/2} \right] \right)^{1/2} \right\} \\
&= -\frac{r_m^{3/2}}{r_s^{1/2}} \left\{ \arccos \left(\frac{y}{r_m} \right)^{1/2} + \left[\frac{y}{r_m} \left(1 - \frac{y}{r_m} \right) \right]^{1/2} \right\} \\
&= -\left[\frac{r_m y}{r_s} \left(r_m - y \right) \right]^{1/2} - \frac{r_m^{3/2}}{r_s^{1/2}} \arccos \left(\frac{y}{r_m} \right)^{1/2} \quad ,
\end{aligned}$$

kjer smo uporabili naslednje identitete:

$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad &, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2} \left(1 + \cos 2x \right) \ , \\
t = \arccos \left(\frac{y}{r_m} \right)^{1/2} \quad &, \qquad \sin 2x = 2 \sin x \cos x \ .
\end{aligned}$$

ter upoštevali, da je $y \leq r_m$. Na analogen način smo izračunali kompaktno obliko funkcije $g(r, r_m)$ v enačbi (20), le da smo v tem primeru odvajali rezultat, ki smo ga dobili z uvedbo nove spremenljivke $y = r_m \sin^2 t$.



Slika 1: Novikov diagram. Predstavljene so linije konstantnega Schwarzschildovega radija r, kjer so razmiki med r ekvidistantni.