TEORIJA GRAVITACIJE

NALOGA

Rok Zaplotnik

Mentor: prof. dr. Andrej Čadež
Ljubljana, 25.1.2007

Kazalo

1 Naloga **2**

2 Uvod **2**

3 Napetostni tenzor **3**

4 Gravitacijsko polje **4**

5 Izsevana moč **6**

6 Zaključek **10**

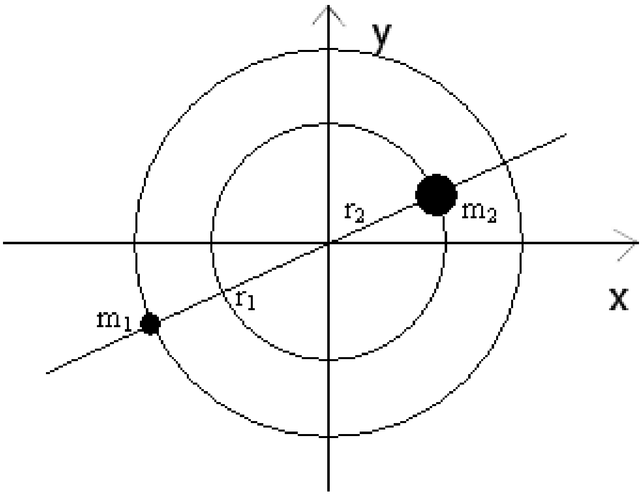
7 Dodatek **11**

1 Naloga

Napišite rešitev za gravitacijsko polje dveh "točkastih" mas, ki v skladu s Keplerjevimi zakoni krožita okrog skupnega težišča in izračunajte moč s katero sistem seva v obliki gravitacijskih valov.

2 Uvod

Najprej si oglejmo, kako dve točkasti masi v skladu s Keplerjevimi zakoni krožita okrog skupnega težišča.
Večja masa m_2 kroži na razdalji r_2 od težišča, manjša masa m_1 pa na razdalji r_1 od težišča. r_2 je seveda manjši, saj je težišče bližje večji masi, Slika 1.



Slika 1: *Dve točkasti masi, ki v skladu s Keplerjevimi zakoni krožita okrog skupnega težišča.*

Po Keplerjevem zakonu imata obe masi enako kotno hitrost

$$\omega = \sqrt{\frac{G(m1+m2)}{R^3}}, \tag{1}$$

kjer je $R = r1 + r2$ razdalja med masama. Njune obodne hitrosti so $v_1 = \omega r_1$ in $v_2 = \omega r_2$. Če radije izrazimo še z razdaljo med masama $r_1 = R\frac{m2}{(m1+m2)}, r_2 = R\frac{m1}{(m1+m2)}$ in v hitrosti vstavimo enačbo (1) dobimo izraze za velikosti hitrosti

$$v_1 = m_2\sqrt{\frac{G}{(m1+m2)R}}, \qquad v_2 = m_1\sqrt{\frac{G}{(m1+m2)R}}. \tag{2}$$

Sedaj lahko zapišemo četverce za trajektorije ξ^λ in hitrosti $v^\lambda = \dot{\xi}^\lambda/\dot{\xi}^0$ teh dveh mas

$$\begin{aligned}\xi^\lambda_{(m_1)} &= (ct, r_1\cos\omega t, r_1\sin\omega t, 0),\\ \xi^\lambda_{(m_2)} &= (ct, r_2\cos(\omega t+\pi), r_1\sin(\omega t+\pi), 0),\\ v^\lambda_{(m_1)} &= (c, -v_1\sin\omega t, v_1\cos\omega t, 0),\\ v^\lambda_{(m_2)} &= (c, -v_2\sin(\omega t+\pi), v_2\cos(\omega t+\pi), 0).\end{aligned} \tag{3}$$

Četverca u^λ in β^λ, sta tesno povezana z četvercem hitrosti, in sicer $u^\lambda = \gamma v^\lambda$, kjer je $\gamma_{1,2} = 1/\sqrt{1-\frac{v_{1,2}^2}{c^2}}$, in $\beta^\lambda = v^\lambda/c$.

3 Napetostni tenzor

Napetostni tenzor za točkasto maso zapišemo v obliki

$$T^{\mu\nu}(x^\lambda) = mc\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\xi}^\mu(\tau)\dot{\xi}^\nu(\tau)\delta^4(x^\lambda - \xi^\lambda(\tau))\mathrm{d}\tau, \tag{4}$$

kjer je $\dot{\xi}^\mu = u^\mu$. Integral zapišemo malo drugače, ga izračunamo

$$T^{\mu\nu} = mc\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\xi}^\mu(\tau)\dot{\xi}^\nu(\tau)\delta^3(x^i - \xi^i(\tau))\delta(ct-\gamma c\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{m}{\gamma}\dot{\xi}^\mu(t)\dot{\xi}^\nu(t)\delta^3(x^i - \xi^i(t)),$$

uporabimo $\beta^\mu = \dot{\xi}^\mu/c\gamma$ in dobimo rezultat

$$T^{\mu\nu} = m\gamma c^2\beta^\mu(t)\beta^\nu(t)\delta^3(x^i - \xi^i(t)). \tag{5}$$

Napetostna tenzorja obeh mas seštejemo, uporabimo četverce β^μ, ki smo jih zapisali v uvodu in dobimo komponente napetostnega tenzorja za naš sistem:

$$T^{00} = c^2\sum_{n=1}^{2} m_n\gamma_n\delta^3(x^i - \xi^i_{(m_n)}(t)),$$

$$T^{01} = T^{10} = c\sum_{n=1}^{2} m_n\gamma_n v^1_{(m_n)}\delta^3(x^i - \xi^i_{(m_n)}(t)),$$

$$T^{11} = \sum_{n=1}^{2} m_n\gamma_n v^1_{(m_n)}v^1_{(m_n)}\delta^3(x^i - \xi^i_{(m_n)}(t)),$$

$$T^{02} = T^{20} = c\sum_{n=1}^{2} m_n\gamma_n v^2_{(m_n)}\delta^3(x^i - \xi^i_{(m_n)}(t)),$$

$$T^{22} = \sum_{n=1}^{2} m_n \gamma_n v^2_{(m_n)} v^2_{(m_n)} \delta^3(x^i - \xi^i_{(m_n)}(t)),$$

$$T^{12} = T^{21} = \sum_{n=1}^{2} m_n \gamma_n v^1_{(m_n)} v^2_{(m_n)} \delta^3(x^i - \xi^i_{(m_n)}(t)),$$

$$T^{\mu 3} = T^{3\mu} = 0,$$

kjer so v^i komponente četverca hitrosti.

4 Gravitacijsko polje

Izračuna gravitacijskega polja se lotimo z reševanjem enačbe za šibko gravitacijsko polje (linearna aproksimacija)

$$\bar{h}_{\mu\nu},^{\lambda}{}_{\lambda} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{6}$$

kjer je $\kappa = 16\pi G/c^4$, G je gravitacijska konstanta, c je hitrost svetlobe, $T_{\mu\nu}$ pa napetostni tenzor snovi. Retardirana rešitev te enačbe je

$$\bar{h}_{\mu\nu}(ct, \mathbf{x}) = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathrm{d}^3 x' \tag{7}$$

Ker nas zanima polje v veliki oddaljenosti od izvora, lahko v imenovalcu integrala $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ zamenjamo z $|\mathbf{x}|$. Predpostavimo, da je čas preleta sistema majhen in ker so hitrosti zvezd majhne v primerjavi s svetlobno hitrostjo, lahko nadomestimo $t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ z $t - |\mathbf{x}|/c$. Zapišemo, da je $r \equiv |\mathbf{x}|$ in dobimo

$$\bar{h}_{\mu\nu}(ct, \mathbf{x}) = \frac{\kappa}{4\pi r} \int T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x}|/c, \mathbf{x}') \mathrm{d}^3 x' \tag{8}$$

Za lažji izračun polja uporabimo zakon o ohranitvi mase-energije

$$T_{\mu\nu},^{\nu} = 0, \tag{9}$$

ga razbijemo na časovne in krajevne komponente

$$T^{k0}{}_{,0} = -T^{kl}{}_{,l}$$

$$T^{00}{}_{,0} = -T^{0l}{}_{,l} \ .$$

Če integriramo prvo enačbo dobimo

$$\int T^{kl} \mathrm{d}^3 x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial ct} \int (T^{k0} x^l + T^{l0} x^k) \mathrm{d}^3 x,$$

integriramo še drugo enačbo

$$\int (T^{k0}x^l + T^{l0}x^k)\mathrm{d}^3x = \frac{\partial}{\partial t}\int T^{00}x^kx^l\mathrm{d}^3x \ ,$$

dobljena izraza združimo in dobimo

$$\int T^{kl}\mathrm{d}^3x = \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int T^{00}x^kx^l\mathrm{d}^3x \ .$$

Rezultat skupaj z enačbo (8) nam pove, da moramo za izračun krajevnih komponent tenzorja $\bar{h}^{\mu\nu}$ zadostuje poznati le vrednost T^{00}.

$$\bar{h}_{kl}(ct, \mathbf{x}) = \frac{\kappa}{4\pi r c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int T^{00}(t - r/c, \mathbf{x}')x'^k x'^l \mathrm{d}^3x' \ . \tag{10}$$

Zapišem T^{00} za naš primer

$$T^{00} = c^2(m_1\delta^3(x^i - \xi^i_{(m_1)}(t)) + m_2\delta^3(x^i - \xi^i_{(m_2)}(t))),$$

kjer sem upošteval, da je za hitrosti veliko manjše od svetlobne hitrosti $\gamma_n = 1$. Sedaj lahko izračunamo komponente $\bar{h}^{kl}$.

$$\bar{h}^{11} = -\frac{\kappa}{4\pi r}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2)\omega^2\cos\left(2\omega(t - r/c)\right),$$

v nadaljevanju bom upošteval, da je $m_1r_1^2 + m_2r_2^2 = R^2m_1m_2/(m_1 + m_2)$.

$$\bar{h}^{22} = \frac{\kappa}{4\pi r}\left(\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)R^2\omega^2\cos\left(2\omega(t - r/c)\right),$$

$$\bar{h}^{12} = \bar{h}^{21} = -\frac{\kappa}{4\pi r}\left(\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)R^2\omega^2\sin\left(2\omega(t - r/c)\right),$$

$$\bar{h}^{k3} = \bar{h}^{3k} = 0$$

Za časovne komponente pa uporabimo enačbo (8) in dobimo

$$\bar{h}^{00} = \frac{\kappa}{4\pi r}(m_1 + m_2)c^2,$$

$$\bar{h}^{01} = \bar{h}^{10} = \frac{\kappa}{4\pi r}c(m_2r_2 - m_1r_1)\omega\sin\left(\omega(t - r/c)\right),$$

$$\bar{h}^{02} = \bar{h}^{20} = \frac{\kappa}{4\pi r}c(m_1r_1 - m_2r_2)\omega\cos\left(\omega(t - r/c)\right).$$

5 Izsevana moč

Izsevana moč na enoto prostorskega kota v smeri n^i, ki jo nek sistem izseva v obliki gravitacijskih valov je

$$-\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega} = r^2 t^{0i} n^i, \tag{11}$$

kjer je $n^i = (x/r, y/r, z/r)$ in t^{0i} komponenta napetostnega psevdo tenzorja gravitacijskega polja. Gravitacijski napetostni psevdotenzor se izračuna z enačbo

$$t_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\kappa}[\bar{h}_{\lambda\sigma,\mu}\,\bar{h}^{\lambda\sigma}{}_{,\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}_{,\mu}\,\bar{h}_{,\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\bar{h}_{\lambda\sigma,\tau}\,\bar{h}^{\lambda\sigma}{}_{,}{}^{\tau} - \frac{1}{2}\bar{h}_{,\lambda}\,\bar{h}_{,}{}^{\lambda})]. \tag{12}$$

Enačba (11) nam pove, da za izračun gostote energijskega toka v radialni smeri potrebujemoo le t^{0i} komponente

$$t_{0i} = -\frac{1}{2\kappa}[\bar{h}_{\lambda\sigma,0}\,\bar{h}^{\lambda\sigma}{}_{,i} - \frac{1}{2}\bar{h}_{,0}\,\bar{h}_{,i} - \frac{1}{2}\eta_{0i}(\bar{h}_{\lambda\sigma,t}\,au\bar{h}^{\lambda\sigma}{}_{,}{}^{\tau} - \frac{1}{2}\bar{h}_{,\lambda}\,\bar{h}_{,}{}^{\lambda})].$$

Ker so komponente $\eta_{0i} = 0$, nam ostane le

$$t_{0i} = -\frac{1}{2\kappa}[\bar{h}_{\lambda\sigma,0}\,\bar{h}^{\lambda\sigma}{}_{,i} - \frac{1}{2}\bar{h}_{,0}\,\bar{h}_{,i}].$$

Ločeno zapišemo časovne in krajevne komponente

$$t_{0i} = -\frac{1}{2\kappa}[\bar{h}_{lk,0}\,\bar{h}_{lk,i} - 2\bar{h}_{0k,0}\,\bar{h}_{0k,i} + \frac{1}{2}\bar{h}_{00,0}\,\bar{h}_{00,i} - \frac{1}{2}\bar{h}_{kk,0}\,\bar{h}_{ll,i} + \frac{1}{2}\bar{h}_{kk,0}\,\bar{h}_{00,i} + \frac{1}{2}\bar{h}_{00,0}\,\bar{h}_{kk,i}] \tag{13}$$

Sedaj lahko s pomočjo programa *Mathematica* izračunamo izsevano moč, ki je integral enačbe (11) po celotnem prostorskem kotu

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \int r^2 t^{0i} n^i \mathrm{d}\Omega. \tag{14}$$

Izsevana moč dveh točkastih mas m_1 in m_2, ki krožita okrog skupnega težišča na medsebojni razdalji R je

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{32G}{5c^5}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)^2 R^4\omega^6. \tag{15}$$

Do istega rezultata pa lahko pridemo tudi na drug način. $T^{00} = c^2\rho$ vstavimo v enačbo (10) in dobimo

$$\bar{h}_{kl}(ct,\mathbf{x}) = \frac{\kappa}{4\pi r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underbrace{\int \rho(t-r/c,\mathbf{x}')x'^k x'^l \mathrm{d}^3x'}_{D_{kl}(t,|\mathbf{x}|)}, \tag{16}$$

kjer je $D_{kl}(t, |\mathbf{x}|)$ deviacijski tenzor. Sled deviacijskega tenzorja ni nič, zato njegovim diagonalnim elementom odštejemo tretjino sledi TrD in dobimo kvadrupolni moment, katerega sled je enaka nič:

$$D_{kl} - \frac{1}{3}\delta_{kl}TrD = Q_{kl}$$

$$Q^{kl} = \int (3x'^k x'^l - r'^2\delta_k^l)\rho(\mathbf{x}')\mathrm{d}^3x'. \tag{17}$$

Enačbo za izračun gravitacijskega polja (10) izrazimo s kvadrupolom

$$\bar{h}^{kl}(ct, \mathbf{x}) = \frac{\kappa}{8\pi r}\frac{1}{3}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}Q^{kl} + \delta_k^l\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int r'^2\delta_k^l\rho(\mathbf{x}')\mathrm{d}^3x'\right]_{t-r/c}. \tag{18}$$

Za izračun moči lahko zanemarimo izraz sorazmeren z δ_k^l v enačbi (18), saj ta del polja lahko odpravimo z umeritvijo polja in ne prispeva k moči, ki jo sistem izseva v obliki gravitacijskih valov. Sedaj dobimo

$$\bar{h}^{kl}(ct, \mathbf{x}) = \frac{\kappa}{8\pi r}\frac{1}{3}\ddot{Q}^{kl}, \tag{19}$$

kjer pike predstavljajo odvode po času, desna stran pa je odvisna od retardiranega časa $t - r/c$.
Pri krajevnih odvodih $\bar{h}_{\lambda\sigma,i}$ lahko zanemarimo odvod faktorja $1/r$, saj smo predvidevali, da je r zelo velik. Sedaj odvisnost od r nastopa le v retardiranem času, kar pomeni, da r in t nastopata le v kombinaciji $t - r/c$, iz česar sledi

$$\bar{h}^{\lambda\sigma}{}_{,i} = -\bar{h}^{\lambda\sigma}{}_{,0}\,\frac{\partial r}{\partial x^i} = -\bar{h}^{\lambda\sigma}{}_{,0}\,n^i.$$

V enačbi (13) nadomestimo krajevne odvode s časovnimi

$$\bar{h}^{kl}{}_{,}{}^{i} = \bar{h}^{kl}{}_{,}{}^{0}\,n^i \quad ,$$

ter uporabimo umeritveni pogoj $\bar{h}_{\nu\lambda,}{}^{\lambda} = 0$ in prevedemo vse časovne komponente v krajevne:

$$\bar{h}^{k0}{}_{,0} = -\bar{h}^{kl}{}_{,l} = \bar{h}^{kl}{}_{,0}\,n^l$$

$$\bar{h}^{00}{}_{,}{}^{0} = \bar{h}^{0l}{}_{,l} = \bar{h}^{0l}{}_{,0}\,n^l = \bar{h}^{kl}{}_{,0}\,n^k n^l$$

Sedaj lahko gravitacijski psevdotenzor pomnožimo z n^i, ga zapišemo le s krajevnimi komponentami in ga izrazimo še z elementi kvadrupolnega momenta, kjer upoštevamo, da je sled kvadrupolnega tenzorja enaka nič

$$t^{0i}n^i = \frac{1}{2\kappa}\left(\bar{h}^{kl}{}_{,}{}^{0}\,\bar{h}^{kl}{}_{,}{}^{0} - 2\bar{h}^{kl}{}_{,}{}^{0}\,\bar{h}^{km}{}_{,}{}^{0}\,n^l n^m + \frac{1}{2}\bar{h}^{kl}{}_{,}{}^{0}\,\bar{h}^{mr}{}_{,}{}^{0}\,n^k n^l n^m n^r\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{\kappa}{8\pi r}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\dddot{Q}^{kl}\dddot{Q}^{kl} - \dddot{Q}^{kl}\dddot{Q}^{km}n^l n^m + \frac{1}{4}\dddot{Q}^{kl}\dddot{Q}^{mr}n^k n^l n^m n^r\right) \tag{20}$$

Za izračun celotne izsevane moči zopet uporabimo integral po celotnem prostorskem kotu (14), kjer uporabimo povprečne vrednosti $n^l n^m$ in $n^k n^l n^m n^r$ po površini sfere

$$\frac{1}{4\pi}\int n^l n^m \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{3}\delta_l^m$$

$$\frac{1}{4\pi}\int n^k n^l n^m n^r \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{15}(\delta_k^l \delta_m^r + \delta_k^m \delta_l^r + \delta_k^r \delta_l^m).$$

Rezultat za celotno izsevano moč kvadrupola je

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{G}{45c^5}\dddot{Q}^{kl}\dddot{Q}^{kl}. \tag{21}$$

Ta enačba je uporabna tako za nihajoči gravitacijski kvadrupol, kot za rotirajoči gravitacijski kvadrupol. Rotirajoči gravitacijski kvadrupol dveh okrog skupnega težišča krožečih točkastih mas, ki ga izračunamo z enačbo (17), je

$$Q^{kl} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}R^2 \begin{pmatrix} 3(\cos^2[\omega(t-r/c)] - \frac{1}{3}) & 3\cos[\omega(t-r/c)]\sin[\omega(t-r/c)] & 0 \\ 3\cos[\omega(t-r/c)]\sin[\omega(t-r/c)] & 3(\sin^2[\omega(t-r/c)] - \frac{1}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tretji časovni odvodi komponent tega kvadrupola so

$$\dddot{Q}^{11} = 12\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}R^2\omega^3 \sin[2\omega(t-r/c)],$$

$$\dddot{Q}^{22} = -12\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}R^2\omega^3 \sin[2\omega(t-r/c)],$$

$$\dddot{Q}^{12} = \dddot{Q}^{21} = -12\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}R^2\omega^3 \cos[2\omega(t-r/c)],$$

vstavimo jih v enačbo (21) in dobimo rezultat

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{32G}{5c^5}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 R^4\omega^6, \tag{22}$$

ki je enak rezultatu (15). Uporabimo še tretji Keplerjev zakon

$$\omega^2 = \frac{G(m1 + m2)}{R^3},$$

in dobimo končni rezultat za izsevano moč, ki je odvisna le od velikosti mas ter razdalije med njima

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{32G^4}{5c^5 R^5}(m_1 m_2)^2(m_1 + m_2). \tag{23}$$

Uporabimo še $E = -Gm_1m_2/2R$ in dobimo rezultat, ki nam pove, kako se razdalja med masama manjša, ker sistem izgublja energijo s sevanjem

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = -\frac{64G^3}{5c^5R^3}m_1m_2(m_1+m_2). \tag{24}$$

To enačbo integriramo po R-ju in po času t in dobimo, kako se medsebojna razdalja med masama spreminja v odvisnosti od časa $R(t)$

$$R(t) = \left(-\frac{256G^3}{5c^5}m_1m_2(m_1+m_2)t + R_0^4\right)^{1/4}, \tag{25}$$

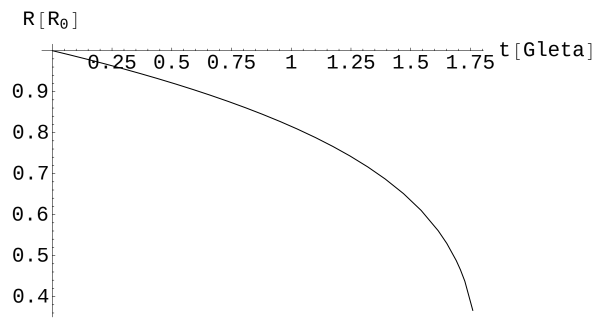
kjer je R_0 razdalja med masama ob času $t_0 = 0$. Lahko zapišemo tudi karakteristični čas τ_{gw}, ki nam pove, kdaj bo medsebojna razdalja padla na vrednost $e^{-1}R_0$.

$$-\frac{1}{\tau} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$$

Če zapišemo še dva radija $R_g = GM/c^2$ in $r_g = G\mu/c^2$, kjer je $M = m_1 + m_2$ skupna masa dvozvezdja in $\mu = m_1m_2/M$ reducirana masa, dobimo

$$\frac{1}{\tau} = \frac{64c}{5R^4}R_g^2r_g. \tag{26}$$

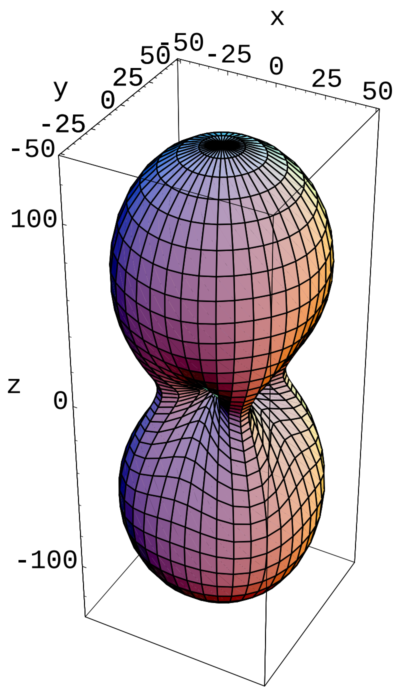
Ogledal sem si tudi funkcijo $R(t)$ za binarni pulzar PSR 1913 + 16, znan tudi kot Hulse -Taylor binarni pulzar, ki je bil odkrit leta 1974. Masi nevtronskih zvezd sta $m_1 = 1.441M_\odot$ in $m_2 = 1.387M_\odot$. Čeprav se v resnici gibljeta po elipsah okoli skupnega težišča, bomo predpostavili da krožita okrog njega in je njuna medsebojna razdalja $R_0 = 1950100$km. Funkcija $R(t)$ za ta pulzar je prikazana na Sliki 2.



Slika 2: *Funkcija (25), spreminjanje medsebojne rezdalje v odvisnosti od časa za Hulse -Taylor binarni pulzar.*

6 Zaključek

Pri tej nalogi smo videli, da dvozvezdje ("točkasti" masi) izgublja energijo s sevanjem gravitacijskih valov. Izsevano moč dobimo s pomočjo gravitacijskega psevdotenzorja (11), ki ga izračunamo s tenzorjem gravitacijskega polja (12) ali s kvadrupolom (20). Za izračun gravitacijskega polja moramo poznati napetostni tenzor našega sistema, ki ga izračunamo s hitrostmi delcev (5). Za izračun kvadrupola pa potrebujemo le trajektorije zvezd (17). Končni izraz za moč (23), ki jo sistem izseva, pa nam pove, da je moč odvisna le od velikosti mas zvezd ter njune medsebojne razdalje, ki pa se zaradi izsevane energije s časom manjša (24).
Za konec sem si še ogledal porazdelitev energijskega toka po prostoru (11). Na Sliki 3 opazimo, da dvozvezdje izseva največ energije ravno v smeri pravokotno na ravnino gibanja obeh zvezd. V dodatku prilagam ukaz v programu *Mathematica* za animacijo, ki vam pokaže, kako se porazdelitev energijskega toka po prostoru (11) spreminja s časom.



Slika 3: *Porazdelitev energijskega toka (11) za dve "točkasti" masi, ki v skladu s keplerjem krožita okrog skupnega težišča, ob nekem času* t_0.

7 Dodatek

```
<< Graphics`ParametricPlot3D`
<< Graphics`Animation`
Animate[SphericalPlot3D[(16 + 128 Cos[theta]^4 - 16 Cos[4 theta] +
(16 - 16 Cos[4(phi +Sqrt[2](1 - t))]) Sin[theta]^4),
{theta, 0, Pi}, {phi, 0, 2 Pi}, AxesLabel -> {x, y, z},
PlotPoints -> 40], {t, 0, 10, 0.1}]
```

Literatura

[1] Ohanian, H., Ruffini, R.: *Gravitation and Spacetime*, W. W. Norton & Company, 1976