Naloga iz predmeta Teorija gravitacije

Zala Lenarčič

8. marec 2011

1 Naloga

Izberi časovno simetrično 3-geometrijo za začetno geometrijo homogene porazdelitve mirujočega idealnega plina z zanemarljivim tlakom, ki je porazdeljen v krogli s polmerom R_i. Poišči rešitve Einsteinovih enačb za kasnejše čase, če je tlak vedno zanemarljiv.

Ker je sistem simetričen, ga bom opisovala s sferičnimi koordinatami (r, θ, ϕ). Radij krogle v kateri je plin porazdeljen bom označila z $R(t)$, kjer je $R(0) = R_i$. Časovno koordinato bom merila s tremi različnimi parametri t, τ, η, kjer je t čas glede na opazovalca daleč stran od plina, τ lastni čas pripadajočega delca, η pa t.i. arc-parameter, ki je definiran s tem, da foton, ki v časovnem intervalu dt potuje po hipersferi z radijem $a(t)$ prepotuje $d\eta = dt/a(t)$. Gostoto plina bom označila z $\rho(r,t)$, pri čemer je $\rho(r, 0) = \frac{3M}{4\pi R_i^3}$ za sistem s celokupno maso M.

Naloga vsebuje kar nekaj predpostavk vrednih komentarja. Prva je časovna simetričnost, ki jo upoštevamo le implicitno: Pove nam, da se je sferično porazdeljen plin od začetne (npr.) eksplozije širil do maksimalnega radija R_{max}, potem pa se začne zopet krčiti. Časovno izhodišče postavimo v trenutek, ko je dosežen $R_{max} = R_i$. Zaradi simetrije bom opazovala le dogajanje pri $t > 0$. Ker je tlak ves čas zanemarljiv, vemo da se bo sferična simetričnost ohranjala.

Enačbe bom pisala v geometričnih enota, kjer c=G=1 in imajo čas, masa in dolžina vse enoto dolžine.

2 Geometrija prostora

Očitno je, da bomo za opis geometrije prostora potrebovali dve metriki; eno za zunanjost sferične porazdelitve plina in eno za njegovo notranjost. Tak opis je seveda možen le, če lahko na meji izpolnimo robne pogoje. Kakšno metriko lahko vzamemo v zunanjosti nam pove Birkhoffov teorem.

2.1 Birkhoffov teorem

Izrek:
Naj bo geometrija danega podprostora prostor-časa sferično simetrična in naj bo rešitev Einsteinovih enačb za prazen prostor. Taka geometrija je potem nujno del Schwarzschildove geometrije.[1]

Dokaz:
Sferična simetrija prostor-časa zagotavlja, da lahko vpeljemo Schwarzschildove koordinate[1]:

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \Phi = \Phi(t,r), \Lambda = \Lambda(t,r)$$

Ko zahtevamo, da metrika izpolnjuje Einsteinove enačbe za vakuum, dobimo kakšne oblike morata biti $\Psi(t,r)$ in $\Lambda(t,r)$. Enačbi za (01) in (10) komponente nam povesta, da Λ ni funkcija časa. Enačba za (00) komponento nam da

$$\frac{e^{-2\Lambda}(-1 + e^{2\Lambda} + 2r\frac{\partial\Lambda}{\partial r})}{r^2} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r(1 - e^{-2\lambda})\right] = 8\pi\rho$$

V tem območju je $\rho = 0$. Integracijske konstante v rešitvi zgornje enačbe določimo z robnimi pogoji. Na meji (v našem primeru površini krogle z radijem R) je metrika podana z

$$1 - e^{-2\Lambda} = \frac{2}{R}\int_0^R 4\pi r^2 \rho dr = \frac{2M}{R} \quad \rightarrow \quad e^{2\lambda} = (1 - \frac{2M}{R})^{-1}$$

Pri $r > R$ pa je potem $e^{2\Lambda} = (1 - \frac{2M}{r})^{-1}$. Iz Einsteinovih enačb za komponento (11) pa dobimo da $\Phi = \frac{1}{2}(1 - 2M/r) + f(t)$. Časovne funkcije $f(t)$ se lahko znebimo tako, da redefiniramo čas kot $t_n = \int e^{f(t)}dt$. Končno dobimo, da je metrika Schwarzschildove oblike

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt_n^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{1}$$

Zunanje polje naše porazdelitve plina ustreza zgornjima pogojema (sferična simetričnost in je rešitev Einsteinovih enačb za vacuum), tudi če plin kolapsira, če le kolaps ohranja sferično simetričnost. Torej je zunanje polje del Schwarzschildove geometrije in ga lahko opišemo z Schwarzschildovo metriko (1). Komentarja vredno je, da je Schwarzschildova metrika rešitev Einsteinovih enačb za stacionaren primer, sedaj pa jo bomo uporabili v nestacionarnem problemu. To lahko naredimo, ker se nam dinamično spreminja samo radij, do katerega jo uporabljamo, sama oblika prostora izven tega radija pa se ohranja, saj je masa plina, ki prostor ukrivlja ves čas enaka M.

2.2 Zunanja geometrija kolapsirajoče zvezde

Od sedaj naprej bom sferično simetrično porazdelitev plina, ki ga obravnavam, imenovala zvezda. Naša zvezda je torej ob času t=0 statična, bo pa v naslednjem trenutku začela kolapsirati. Ko sledimo kolapsu bomo v zunanjosti vpeljali Schwarzschildovo metriko, medtem ko bomo v notranjem delu vpeljali neko drugo.

Kako se radij zvezde spreminja s časom lahko ugotovimo že iz zunanje metrike - s poznavanjem enačb za orbito testnega delca v taki geometriji. Vzamemo orbito delca, ki je iz r=0 izstreljen radialno navzven, na svoji poti testni delec doseže maksimalno oddaljenost R_i in se potem spet začne približevati začetni r=0. Zahtevamo še, da je na maksimalni oddaljenosti R_i ob času t=0. Tak delec bo torej ves čas tik nad površino zvezde, njegova trajektorija pa bo opisala časovno spreminjanje radija zvezde.

To trajektorijo dobimo s pomočjo uporabe zveze med 4-vektorjem hitrosti in mirovne mase m testnega delca

$$0 = g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta + m^2 = g^{00}p_0p_0 + g_{rr}p^rp^r + m^2 = -\frac{E^2}{1-2M/r} + \frac{m^2}{1-2M/r}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + m^2$$

kjer je $p_0 = -E, p^r = mdr/d\tau, p^\theta = p^\phi = 0$ saj delec potuje radialno navzven. Ko je delec na največji oddaljenosti, je njegova hitrost 0 ($dr/d\tau$=0) in je $E^2/m^2 = 1-2M/R_i$, tako da bom v nadaljne njegovo energijo na enoto mase izrazila kar z maksimalnim radijem R_i. Dobimo diferencialno enačbo

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{2M}{r} - \frac{2M}{R_i} \tag{2}$$

katere rešitev je cikloida

$$r = \frac{R_i}{2}(1+\cos\eta), \quad \tau = \frac{R_i}{2}\sqrt{\frac{R_i}{2M}}(\eta + \sin\eta) \tag{3}$$

Trenutno je η uveden le kot parameter, ki preteče vrednosti $\eta \in (-\pi, \pi)$ od izstrelitve do ponovne vrnitve v $r = 0$. Taka orbita je možna le iz gledišča delca samega. Za zunanjega opazovalca pa bi zaradi singularnosti v metriki pri $r = 2M$ delec od r_{max} do $r = 2M$ padal neskončno dolgo in ga ne bi nikoli dosegel.

Iz tega računa že lahko zaključimo, kako se bo s časom spreminjal polmer zvezde, in sicer kot

$$R = \frac{R_i}{2}(1+\cos\eta) \tag{4}$$

Kolaps se začne, ko je $\eta = 0$, konča pa pri $\eta = \pi$. Pri tem lastni čas na površini zvezde $\tau(\eta)$ teče kot podano v enačbi (3).

2.3 Notranja geometrija

Radi bo opisali še obnašanje notranjosti zvezde. Ob začetnem trenutku je plin homogeno in izotropno porazdeljen po zvezdi. Ob tem dobimo idejo, da bi v notranjosti lahko uporabili Friedmannovo metriko za zaprto vesolje[2], ki potrebuje ravno ti dve predpostavki. Obenem pa z njo lahko zadostimo tudi pogoju mirovanja ob t=0.

Če uporabimo sogibajoče se, hipersferične koordinate χ, θ, ϕ in postavimo izhodišče v center zvezde, se bo metrika zapisala kot[2]

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)(d\chi^2 + \sin\chi^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)) \tag{5}$$

kjer je τ lastni čas delcev znotraj krogle, χ je parameter, ki nadomesti radialno koordinato z relacijo $r(\tau) = a(\tau)\sin\chi$ in $a(\tau)$ opisuje krčenje in razširjanje zvezde. Glede na našo postavitev časovne osi je $a(0) = a_m$ maksimalen in $R_i = a_m \sin\chi_0$. Parameter χ_0 stoji za radij zvezde $R = a\sin\chi_0$. V tem pogledu dobimo razliko napram metriki za zaprto vesolje. Tam je $0 \leq \chi \leq \pi$, medtem ko zvezdo parametriziramo z $0 \leq \chi \leq \chi_0$.

Ali se bo homogenost gostote ohranjala vidimo iz kontinuitetne enačbe. Recimo, da dovolimo sferno-simetrično zgoščevanje in vzamemo za gostoto $\rho = \rho(\tau, \chi)$. Ker smo v sogibajočih se koordinatah ima tenzor napetosti od 0 različno le komponento $T_{00} = \rho(\tau, \chi)a^2$. Kontinuitetno enačbo dobimo iz relacije $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, ki je v tem primeru

$$0 = T^{0\nu}{}_{;\nu} = \frac{\partial T^{00}}{\partial\tau} + \Gamma^0_{00}T^{00} + \Gamma^\nu_{\nu 0}T^{00} = \frac{\dot\rho}{\rho} + 3\frac{\dot a}{a} \ \rightarrow\ \rho \propto a^{-3}$$

Pove nam, da $\rho \neq \rho(\chi)$. Z drugimi besedami, homogenost plina se bo ohranjala. Ker poznamo začetno gostoto $\rho(0) = \frac{3M}{4\pi R_i^3}$, lahko iz tega zaključimo kakšna bo ob poljubnem času, in sicer

$$\rho(t) = \frac{3M}{4\pi R_i^3}\frac{a_m^3}{a^3}$$

Časovno odvisnost $a(\tau)$ dobimo iz rešitev Einsteinove enačbe $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ za komponento (00).

$$\frac{3}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{3}{a^2} = 8\pi\rho \tag{6}$$

Rešitev diferencialne enačbe (6) je spet cikloida

$$a(\eta) = \frac{1}{2}a_m(1+\cos\eta), \quad \tau(\eta) = \frac{1}{2}a_m(\eta + \sin\eta) \tag{7}$$

kar je seveda smiselno, če hočemo na meji obe geometriji zlepiti. Parameter η, ki sedaj nastopa v enačbah je t.i. arc-parameter, saj je izpolnjeno $d\tau/d\eta = a(\eta)$.

2.4 Zlepitev obeh metrik

Na površini zvezde moramo obe geometriji zlepiti skupaj. Seveda je treba preveriti, če je to sploh možno. Kriteriji, ki nam to povedo so:

- ujemanje obsega zvezde $2\pi R$
- ujemanje intrinzične geometrije
- ujemanje tenzorja zunanje ukrivljenosti.

Obsega se bosta ujemala, če se bosta ujemala izraza za τ in R, dobljena iz (3) in (7). Izpolnjene morajo biti zveze:

$$R_i = a_m \sin\chi_0 \tag{8}$$

$$R_i\sqrt{\frac{R_i}{2M}} = a_m \ \rightarrow\ M = \frac{1}{2}\sin^3\chi_0 a_m \tag{9}$$

Zunanjo in notranjo geometrijo lepimo na površini krogle, ki je pravzaprav 3-geometrija s krajevno normalo. Da je ujemanje 3-metrik ter ujemanje tenzorja zunanje ukrivljenosti, dobljenih iz Schwarzschildove in Friedmannove 4-metrike, že potreben in zadosten pogoj za to, da so Einsteinove enačbe polja izpoljenje tudi na površini zvezde se prepričamo z naslednjim razmislekom[2]. Postopimo podobno kot pri izpeljavi robnih pogojev za električno in magnetno polje na robu dveh snovi. Einsteinove enačbe polja integriramo preko infinitezimalne poti v smeri normale na 3-geometrijo, tako da začnemo tik 'pod' 3-geometrijo in zaključimo tik 'nad' trigeometrijo.

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dnG_{\mu\nu} = 8\pi \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dnT_{\mu\nu} = 0 \tag{10}$$

Zgornji integral je enak 0, ker napetostni tenzor v našem primeru na površini ne vsebuje δ-vrednosti, ki bi integral lahko naredile končen. Da bo izpolnjena enakost tudi za izraz z $G_{\mu\nu}$, moramo poskbeti, da tudi ta ne vsebuje δ-funkcij, ki bi lahko bile posledica odvajanja nezvezne funkcije. Pogledati moramo Einsteinove enačbe na 3-geometriji

$$\begin{aligned}
2G^0{}_0 &= -{}^{(3)}R + (TrK)^2 - Tr(K^2)\\
G^0{}_i &= -(K_i{}^m{}_{;m} - (TrK)_{;i})\\
G^i{}_j &={}^{(3)} G^i{}_j + \left((K^i{}_j - \delta^i_j TrK)_{,n} - (TrK)K^i{}_j + \frac{1}{2}\delta^i_j(TrK)^2 + \frac{1}{2}\delta^i_j(TrK^2)\right)
\end{aligned}$$

kjer je $TrK^2 = K_j{}^m K_m{}^j$, $TrK = K^j_j$ in je kovariantni odvod ; glede na 3-metriko ter $_{,n}$ odvajanje v smeri normale. ${}^{(3)}R$ in K_{ij} ne bodo vsebovali δ-funkcij, če bo 3-metrika dobljena iz zgornje in iz spodnje 4-metrike enaka (in za zaporedne rezine zvezna funkcija). Iz tretje enačbe pa sledi, da morata biti zunanji ukrivljenosti, dobljeni iz zunanje in notranje metrike enaki.

Kot že rečeno ujemanje intrinzične geometrije preverimo tako, da izračunamo 3-metriko za rez po površini krogle. Ta rez ima torej koordinate (η, θ, ϕ). Intrinzični geometriji se bosta ujemali, če se ujemata 3-metriki za zunanjo Schwarzschieldovo geometrijo in notranjo Friedmannovo.

Kakšna bo 3-metrika v notranjosti ni težko poiskati. Vzeti moramo osnovno 4-metriko podano s (5) pri konstantnem $\chi = \chi_0$. Dobimo

$$ds^2 = -d\tau^2 + a(\tau)^2 \sin\chi_0^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)) = a(\eta)^2(-d\eta^2 + \sin\chi_0^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2))) \tag{11}$$

Prepričati se moramo še, da je oblika enaka tudi za zunanjost. Ker je Friedmannova 3-metrika metrika v prosto padajočem sistemu, je zaradi primerjave potrebno iti v prosto padajoč sistem tudi v zunanjosti. Schwarshildovo metriko moramo zato zapisati v Novikovih koordinatah[3].

$$ds^2 = -d\tau^2 + \left(\frac{R^{*2}+1}{R^{*2}}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial R^*}\right)^2 dR^{*2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{12}$$

kjer je vsakemu delcu pripisan

$$R^* = (r_{max}/2M - 1)^{1/2}$$

Za rez po površini zvezde, je $R^* = (R_i/2M - 1)^{1/2}$. Funkcija $r(\tau, R^*)$, ki nastopa v (12) je podana implicitno z enačbo

$$\frac{\tau}{2M} = \pm(R^{*2}+1)\left[\frac{r}{2M} - \frac{(r/2M)^2}{R^{*2}+1}\right]^{1/2} + (R^{*2}+1)^{3/2}\arccos\left[\left(\frac{r/2M}{R^{*2}+1}\right)^{1/2}\right] \tag{13}$$

Schwarzshildova 3-metrika bo na rezu s konstantnim R^* enaka Friedmannovi, če bosta τ in r podana z (3). Torej moramo preveriti le, če v tem primeru izpolnita enačbo (13). Z uvedbo $\frac{r}{2M} = \tilde{r}$, $\frac{R_i}{2M} = \tilde{R}_i$ se enačba (13) zapiše kot

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{R}_i^{3/2}(\eta + \sin\eta)}{2} &= \pm\tilde{R}_i\left(\tilde{r} - \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{R}_i}\right)^{1/2} + \tilde{R}_i^{3/2}\arccos\left[\left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{R}_i}\right)^{1/2}\right] \\
\frac{(\eta + \sin\eta)}{2} &= \pm\left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{R}_i} - \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{R}_i^2}\right)^{1/2} + \arccos\left[\left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{R}_i}\right)^{1/2}\right]
\end{aligned}$$

Uporabimo, da je r podan z enačbo (3), torej $\frac{\tilde{r}}{\tilde{R}_i} = \frac{1}{2}(1 + \cos\eta)$.

$$\begin{aligned}
\frac{(\eta + \sin\eta)}{2} &= \pm\left(\frac{1+\cos\eta}{2} - \frac{1 + 2\cos\eta + \cos^2\eta}{4}\right)^{1/2} + \arccos\left[\cos\frac{\eta}{2}\right] \\
\frac{(\eta + \sin\eta)}{2} &= \pm\left(\frac{1 - \cos^2\eta}{4}\right)^{1/2} \pm \frac{\eta}{2}
\end{aligned}$$

Vidimo, da je z izbiro + znaka izmed $\pm$ enačba izpoljena. 3-metriki za rez po zunanjosti krogle se torej ujemata. Za zaporedne rezine sta zvezna funkcija.

Radi bi preverili še, da se ujemata tudi zunanji ukrivljenosti istega reza za zunanjo in notranjo metriko.

Najprej naredimo račun za notranjo geometrijo. Normala na rezino ima sedaj komponente $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (a(\eta), 0, 0, 0)$ kjer gre vrstni red baznih vektorjev kot $\mathbf{e}_\chi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$. 4-metrika je enaka

$$g^F_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(a^2, -a^2, a^2\sin^2\chi, a^2\sin^2\chi\sin^2\theta)$$

Tenzor zunanje ukrivljenosti sem izračunala po definiciji[2]

$$K_{ik} = -n_{i;k} = -\left[\frac{\partial n_i}{\partial x^k} - \Gamma^\sigma_{ik} n_\sigma\right] = n_\sigma \Gamma^0_{ik} \tag{14}$$

Posamezne komponente dobljene iz enačbe (14) so

$$K_{\eta\eta} = K_{\theta\phi} = K_{\eta\theta} = K_{\eta\phi} = 0 \tag{15}$$

$$K_{\theta\theta} = K_{\phi\phi}/\sin^2\theta = -a(\eta)\sin\chi_0\cos\chi_0$$

Postopek ponovimo še za Novikovo metriko. Tu moramo najprej R^* koordinato nadomestiti z χ. Iz

$$R^* = \left(\frac{r_{max}}{2M} - 1\right)^{1/2} = \left(\frac{a_m\sin\chi}{2M} - 1\right)^{1/2}$$

sledi

$$\frac{\partial R^*}{\partial\chi} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{a_m\sin\chi}{2M} - 1}}\frac{a_m}{2M}\cos\chi \tag{16}$$

Potrebujemo še zvezo $r = \frac{r_{max}}{2}(1+\cos\eta) = M(R^{*2}+1)(1+\cos\eta)$, od koder sledi $\frac{\partial r}{\partial R^*} = 2MR^*(1+\cos\eta)$. Če uporabimo še $r_{max} = a_m\sin\chi$ in $\frac{a_m}{2M} = \sin^{-3}\chi_0$, dobimo da je celoten matrični element $g_{\chi\chi}$ enak

$$\begin{aligned} g_{\chi\chi} &= \left(\frac{R^{*2}+1}{R^{*2}}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial R^*}\right)^2\left(\frac{\partial R^*}{\partial\chi}\right)^2 && (17)\\ &= a_m\sin\chi\ 2M(1+\cos\eta)^2\ \frac{1}{2\sqrt{\frac{a_m\sin\chi}{2M} - 1}}\frac{a_m}{2M}\cos\chi && (18)\\ &= a^2\frac{\sin\chi\cos^2\chi}{\sin\chi - \sin^3\chi_0} && (19)\end{aligned}$$

ostali matrični elementi so enaki kot prej, torej je celotna 4-metrika enaka

$$g^N_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(a^2\frac{\sin\chi\cos^2\chi}{\sin\chi - \sin^3\chi_0}, -a^2, a^2\sin^2\chi, a^2\sin^2\chi\sin^2\theta) \tag{20}$$

Normalo na rez je sedaj enaka

$$(a\frac{\sqrt{\sin\chi}\cos\chi}{\sqrt{\sin\chi - \sin^3\chi_0}}, 0, 0, 0) \tag{21}$$

Če iz (20) in (21) izračunamo komponente tenzorja ukrivljenosti po definiciji (14) dobimo iste vrednosti, kot že zapisano v enakostih (15).

Tako smo torej preverili, da sta intrinzični in zunanji ukrivljenosti za obe metriki enaki, kar pomeni, da so Einsteinove enačbe polja izpoljene tudi na površini zvezde.

3 Zaključek

V nalogi sem izračunala rešitve Einsteinovih enačb za homogeno porazdelitev plina, ki od začetne mirovne situacije začne kolapsirati vase. Rešitev sem pravzaprav dobila z zlepitvijo dveh znanih rešitev Einsteinovih enačb polja, ki pa imata primerno geometrijo, da vsaka na svojem podprostoru popišeta moj problem.

Ker sem večino časa delala v prosto padajočih koordinatah, je bil čas, ki je nastopal v mojih rešitvah, lastni (včasih parametriziran z η). S tem sem se izognila singularnostim, ki bi nastopile, če bi čas štela kot opazovalec daleč stran. Zato bi dodala le kot komentar, da se naša zvezda spremeni v črno luknjo, ko postane njen radij $R = 2M$. Od tega trenutka dalje, bi vsaka informacija iz zvezde do opazovalca daleč stran potovala neskončno dolgo časa. Če pa sedimo na zvezdi, tega prehoda ne opazimo in lahko dosežemo tudi $R < 2M$.

Ko se vprašamo ali moj poenostavljen model sploh opiše kakšen pojav v vesolju - ki bi bil v tem primeru najverjetneje kolaps zvezde - se je potrebno vrniti k predpostavkam. Predpostavki mojega problema sta bili začetna homogena porazdelitev plina in stalno zanemarljivo majhen tlak. Zaradi slednje predpostavke se nam je homogenost ohranjala, zvezda pa je iz začetne trenutne mirovne situacije kolapsirala vse do singularnosti z $R = 0$; neglede na njeno maso in brez kakšnih vmesnih stopenj, ki navadno nastopijo v dejanskih sistemih. Ker v realnih kolapsih zvezde na potek močno vpliva prav tlak kot posledica jedrskih reakcij, segrevanja zaradi sesedanja in sevanja, je moj poenostavljen model najbrž pravzaprav precej odmaknjen od dogajanja v vesolju.

Literatura

[1] I. Ciufolini and J.A. Wheeler. *Gravitation and inertia.* Princeton Univ Pr, 1995.

[2] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation.* WH Freeman & co, 1973.

[3] Andrej Čadež. *Teorija gravitacije.* Neobjavljeno.