Domača naloga iz Gravitacije

Gal Matijevič

1 Naloga

Poišči gravitacijske potenciale v okolici rotirajoče mase in izračunaj, kako se giblje os vrtavke, ki kroži okoli te mase.

2 Einsteinove enačbe polja

Gravitacijske potenciale v oklici poljubne mase najdemo tako, da rešimo ustrezne enačbe polja. Splošno lahko te enačbe v komponenti obliki zapišemo kot

$$h_{\mu\nu,}{}^{\lambda}{}_{\lambda} - \left(h_{\mu\lambda,\nu}{}^{\lambda} + h_{\nu\lambda,\mu}{}^{\lambda}\right) + h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h_{,\lambda}{}^{\lambda} + \eta_{\mu\nu} h_{\lambda\sigma,}{}^{\lambda\sigma} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{1}$$

kjer smo z $h_{\mu\nu}$ označili gravitacijski tenzor in z $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ sled tega tenzorja. Pri nadaljni obravnavi je za voljo preglednosti pripravno vpeljati tenzor

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h, \tag{2}$$

saj tako enačbe dobijo lepšo obliko. Če izberemo še umeritev

$$\bar{h}_{\mu\nu,}{}^{\nu} = 0, \tag{3}$$

lahko enačbe (1) zelo preprosto zapišemo kot

$$\bar{h}_{\mu\nu,}{}^{\lambda}{}_{\lambda} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{4}$$

kjer je $\kappa = -16\pi G/c^4$.

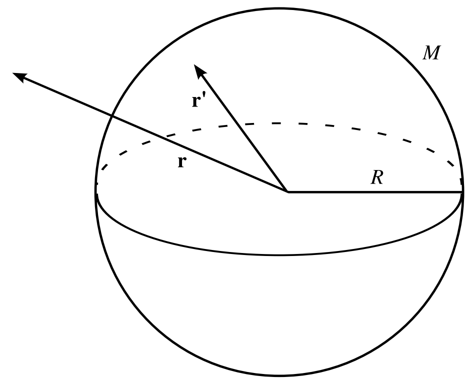
3 Gravitacijsko polje mirujoče mase

Koordinatni sistem izberimo v težišču krogle z maso M. Enačbe polja (4) lahko za območje zunaj krogle zapišemo kot

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,}{}^{\lambda}{}_{\lambda} = 0, \tag{5}$$

z umeritvenim pogojem (3). Ob predpostavki, da se gravitacijsko polje s časom ne spreminja, se zgornja enačba poenostavi v

$$\nabla^2 \bar{h}^{\mu\nu} = 0. \tag{6}$$



Slika 1: K izpeljavi gravitacijskega polja mirujoče mase.

Rešitev take enačbe za sferično simetričen problem je enaka

$$\bar{h}^{\mu\nu} = \frac{C^{\mu\nu}}{r}, \tag{7}$$

kjer $C^{\mu\nu}$ predstavlja konstantno matriko. Ko to rešitev vstavimo v enačbo (3), dobimo

$$C^{i\nu}\nabla\frac{1}{r} = -C^{i\nu}\frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0. \tag{8}$$

Zgornja identiteta velja za poljuben $\mathbf{r}$ le v primeru, ko so vse komponente $C^{i\nu}$ enake 0. Edina od 0 razilčna komponenta matrike $C^{\mu\nu}$ je torej C^{00}. Njeno povezavo z gravitacijskim tenzorjem dobimo, če upoštevamo zvezo

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}, \tag{9}$$

torej

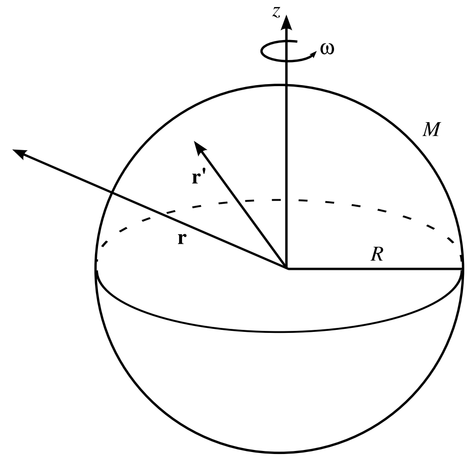
$$h_{00} = \bar{h}_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}\bar{h} = \frac{C_{00}}{r} - \frac{1}{2}\frac{C_{00}}{r} = \frac{C_{00}}{2r} = \frac{2GM}{c^2 r}, \quad C_{00} = \frac{4GM}{c^2}. \tag{10}$$

Tenzor $\bar{h}^{\mu\nu}$ ima le prvo (00) komponento različno od nič,

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{4GM}{c^2 r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Iz enačbe (9) lahko tako izračunamo vse komponente gravitacijskega tenzorja

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{2GM}{c^2 r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2GM}{c^2 r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2GM}{c^2 r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2GM}{c^2 r} \end{pmatrix}. \tag{12}$$



Slika 2: K izpeljavi gravitacijskega polja rotirajoče mase.

4 Gravitacijsko polje vrteče se mase

Sedaj, ko poznamo gravitacijsko polje mirujoče mase, ki nam bo služilo za primerjavo, se lahko lotimo računanja polja rotirajoče mase. Predpostavili bomo, da se masa vrti s konstantno hitrostjo in je posledično polje neodvinso od časa.

Enačbo (4) lahko okrnemo za časovni del in dobimo

$$\nabla^2 \bar{h}^{\mu\nu}(\mathbf{r}) = \kappa T^{\mu\nu}(\mathbf{r}). \tag{13}$$

s splošno rešitvijo

$$\bar{h}^{\mu\nu}(\mathbf{r}) = -\frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{T^{\mu\nu}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3 r'. \tag{14}$$

Izraz $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ v integralu lahko za dele prostora daleč stran od krogle razvijemo v Taylorjevo vrsto

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^3} + \ldots = \\ &= \frac{1}{r} + \frac{x^i x'^i}{r^3} + \ldots \end{aligned} \tag{15}$$

To vstavimo v enačbo (14) in dobimo

$$\bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{4\pi r} \int T^{\mu\nu} d^3 r' - \frac{\kappa x^i}{4\pi r^3} \int x'^i T^{\mu\nu} d^3 r'. \tag{16}$$

Lotimo se najprej prvega integrala na desni v zgornji enačbi. Po dogovoru je integral prve komponente napetostnega tenzorja po prostoru enak

$$\int T^{00} d^3 r' = Mc^2. \tag{17}$$

Z ostalimi komponentami je nekoliko več dela. Pri reševanju se obrnemo na ohranitveni zakon, ki pravi, da je divergenca napetostnega tenzorja enaka nič,

$$T_{\mu\nu},^{\nu} = 0, \tag{18}$$

ali, če izpustimo časovno odvisnost,

$$T_{i\nu},^{i} = \frac{\partial T_{i\nu}}{\partial x^i} = 0. \tag{19}$$

Ta izraz pomožimo z x'^i in integriramo po prostoru:

$$\int x'^i \frac{\partial T^{j\nu}}{\partial x'^j} d^3r' = 0. \tag{20}$$

Zgornjo identiteto dokažemo z integracijo po delih,

$$\int x'^i \frac{\partial T^{j\nu}}{\partial x'^j} d^3r' = -\int T^{j\nu}\delta_{ij} d^3r' = -\int T^{i\nu} d^3r' = 0, \tag{21}$$

torej so prostorski integrali vseh preostalih komponent enaki 0.

Sedaj izračunajmo še drugi integral iz enačbe (16). Vrednost integrala prve komponente naj bo enaka 0,

$$\int x'^i T^{00} d^3r' = 0. \tag{22}$$

S tem smo postavili izhodišče koordinatnega sistema v težišče krogle. Pri izračunu ostalih komponent si spet pomagamo z ohranitvenim zakonom (18). Tokrat izraz (19) pomnožimo z $x'^i x'^j$ in integriramo po prostoru,

$$\int x'^i x'^j \frac{\partial T^{k\nu}}{\partial x'^k} d^3r' = 0. \tag{23}$$

Ponovno integriramo po delih,

$$\begin{aligned} \int x'^i x'^j \frac{\partial T^{k\nu}}{\partial x'^k} d^3r' &= -\int \delta_{ik} x'^j T^{k\nu} d^3r' - \int x'^i \delta_{jk} T^{k\nu} d^3r' = \\ &= -\int x'^j T^{i\nu} d^3r' - \int x'^i T^{j\nu} d^3r' = \\ &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Tenzor vrtilne količine vpeljemo kot

$$J^{ij} = \int \left(x'^i T^{j0} - x'^j T^{i0} \right) d^3r', \tag{25}$$

pri čemer smo upoštevali, da komponente T^{i0} napetostnega tenzorja predstavljajo gostoto impulzov. V koordinatnem sistemu z izhodiščem v središču rotirajoče mase lahko komponente spinske vrtilne količine te mase preprosto izrazimo kot

$$L_1 = J^{23}, \quad L_2 = J^{31}, \quad L_3 = J^{12}, \tag{26}$$

ali, če raje vse skupaj zapišemo v enem izrazu,

$$L_i = \int \varepsilon^{ijk} \left(x'^j T^{k0} - x'^k T^{j0} \right) d^3r', \tag{27}$$

kjer tenzor ε^{ijk} definiramo tako, da so komponente, ki jih dobimo s pozitivnimi permutacijami indeksov ijk ($123 \to 231 \to 312$) enake 1, vse ostale pa nič. Ob pogledu na enačbo

(24) opazimo, da sta člena v oklepaju pod zgornijm integralom nasporotno enaka, zato lahko zgornjo definicijo poenostavimo v

$$L_i = 2\int \varepsilon^{ijk} x'^j T^{k0} d^3r'. \tag{28}$$

Opazimo, da zgornji izraz vsebuje iskani integral.

V nadaljevanju bomo potrebovali naslednjo identiteto:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x'^k}\left(x'^j T^{ik} + x'^i T^{jk}\right) &= \frac{1}{2}\left(\delta_{jk}T^{ik} + x'^j \frac{\partial T^{ik}}{\partial x'^k} + \delta_{ik}T^{jk} + x'^i \frac{\partial T^{jk}}{\partial x'^k}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(T^{ij} + T^{ji}\right) = \\
&= T^{ij},
\end{aligned} \tag{29}$$

kjer smo ponovno upoštevali, da je divergenca napetostnega tenzorja 0 in da je ta tenzor simetričen. Zgornjo identiteto vstavimo v spodnji integral in integriramo po delih:

$$\begin{aligned}
\int x'^i T^{jk} d^3r' &= \frac{1}{2}\int x'^i \frac{\partial}{\partial x'^l}\left(x'^k T^{jl} + x'^j T^{kl}\right) d^3r' = \\
&= \frac{1}{2}\left[-\int \delta_{il} x'^k T^{jl} d^3r' - \int \delta_{il} x'^j T^{kl} d^3r'\right] = \\
&= \frac{1}{2}\int \delta_{il}\left(x'^k T^{jl} + x'^j T^{kl}\right) d^3r' = \\
&= \frac{1}{2}\int \left(x'^k T^{ji} + x'^j T^{ki}\right) d^3r' = \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Pri zadnjem enačaju se sklicujemo na enačbo (24).

Sedaj že lahko zapišemo komponente tenzorja $\bar{h}^{\mu\nu}$:

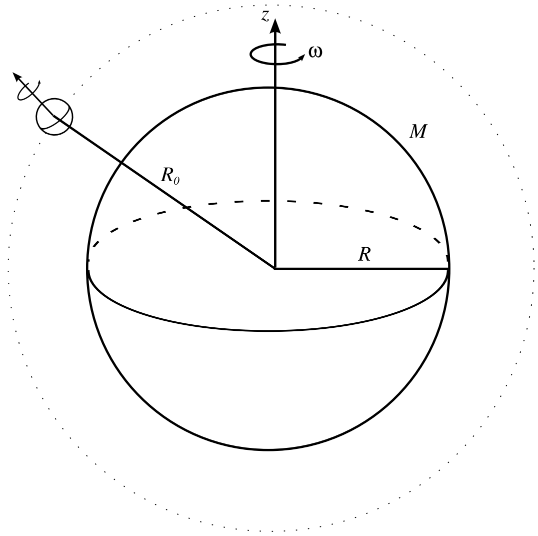
$$\begin{aligned}
\bar{h}^{00} &= -\frac{\kappa M c^2}{4\pi r} = \frac{4GM}{c^2 r} \\
\bar{h}^{10} = \bar{h}^{01} &= -\frac{2G}{c^4 r^3} x^2 L_3 \\
\bar{h}^{20} = \bar{h}^{02} &= \frac{2G}{c^4 r^3} x^1 L_3 \\
\bar{h}^{30} = \bar{h}^{03} &= \frac{2G}{c^4 r^3} x^2 L_1,
\end{aligned} \tag{31}$$

vse ostale pa so enake 0. Izberimo os vrtenja v smeri z kot je to prikazano na sliki (2), torej je edina od 0 različna komponenta vrtilne količine $L_3 = L_z$. Končno obliko gravitacijskega tenzorja izračunamo iz izraza (9):

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{2GM}{c^2 r} & -\frac{2GyL_z}{c^4 r^3} & \frac{2GxL_z}{c^4 r^3} & 0 \\ -\frac{2GyL_z}{c^4 r^3} & \frac{2GM}{c^2 r} & 0 & 0 \\ \frac{2GxL_z}{c^4 r^3} & 0 & \frac{2GM}{c^2 r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2GM}{c^2 r} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Vidimo, da se gravitacijsko polje vrteče se krogle od polja mirujoče krogle v našem primeru razlikuje po dveh dodatnih izvendiagonalnih elementih. V spošnem (takrat, ko bi vrtilna količina krogle kazala v poljubno smer) bi lahko pridelali tri nove komponente, vendar ob tem pomnimo, da takšna obravnava velja le za šibka gravitacijska polja.

5 Precesija vrtavke



Slika 3: Sferična vrtavka v orbiti okoli vrteče se mase.

Oglejmo si, kako se giblje os vrtenja kroglaste vrtavke, ki prosto pada okoli sferično porazdeljene vrteče se mase (Zemlje). V prosto padajočem sistemu definirajmo smer $\hat{n}$ proti oddaljeni mirujoči zvezdi, ki v tem sistemu sovpada z smerjo vrtilne količine vrtavke. Zanimal nas bo časovni odvod vektorja $\hat{n}$. V ta namen se najprej spomnimo, kako zapišemo kovariantni odvod poljubnega vektorja A^μ,

$$A^\mu{}_{;\nu} = A^\mu{}_{,\nu} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} A^\lambda. \tag{33}$$

Odvod vektorja A^μ vzdolž krivulje definiramo kot

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} = A^\mu{}_{;\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} A^\nu \frac{dx^\lambda}{d\tau}. \tag{34}$$

V poljubnem koordinatnem sistemu lahko spremebo vektorja $\hat{n}$ zapišemo kot

$$\frac{dn^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} n^\nu \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0, \tag{35}$$

saj vemo, da pri premiku vzdolž geodetske krivulje naša vrtavka ne spremeni smeri vrtenja. Zgornji odvod bomo izračunali v sistemu (x'^μ), ki ima enako hitrost kot prosto padajoči sistem, vendar se ne vrti glede na oddaljeno zvezdo. V tem sistemu lahko spremembo smeri zapišemo kot

$$\frac{dn'^i}{d\tau} = -\Gamma'^i{}_{j0} n'^j. \tag{36}$$

Upoštevali smo le krajevni del, saj vemo, da je časovni del enak 0, ker se sistema hkrati gibljeta. Christoffelove $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ simbole bomo izračunali iz metričnega tenzorja,

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu} \right). \tag{37}$$

V zgornji enačbi $g^{\mu\nu}$ prdstavlja inverz metričnega tenzorja $g_{\mu\nu}$.

V mirujočem sistemu z izhodiščem v središču Zemlje, lahko hitrost vrtavke izračunamo klasično (predpostavimo, da je majhna v primerjavi s hitrostjo svetlobe) iz ohranitve energije,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G\frac{mM}{r} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{38}$$

Prehod iz tega sistema v sistem x'^{μ} predstavlja Lorentzova transformacija

$$\begin{aligned} x^0 &= x'^0 + vx'^1 + ax'^0x'^3 \\ x^1 &= x'^1 + vx'^0 \\ x^2 &= x'^2 \\ x^3 &= R_0 + x'^3 + \frac{1}{2}a(x'^0)^2, \end{aligned} \tag{39}$$

kjer smo z R_0 označili razdaljo od središča Zemlje do vrtavke in upoštevali, da vrtavka okoli Zemlje potuje v ravnini xz. Zadnji člen v enačbi za x'^0 dodamo zato, da je v primeru ravnega prostora ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$) transformacija pravilna.

Sedaj se lahko lotimo računanja komponent tenzorja $g_{\mu\nu}$ v novem sistemu. Iz invariantnosti elementa ds^2 lahko izpeljemo, kako se transformira tenzor $g_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} ds^2 &= ds'^2 \\ g_{\lambda\sigma}dx^{\lambda}dx^{\sigma} &= g'_{\mu\nu}dx'^{\mu}dx'^{\nu} \\ g'_{\mu\nu} &= \frac{dx^{\lambda}}{dx'^{\mu}}\frac{dx^{\sigma}}{dx'^{\nu}}g_{\lambda\sigma}. \end{aligned} \tag{40}$$

Tenzor $q_{\mu\nu}$ izračunamo iz tenzorja (32) in

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{42}$$

Ko vse vstavimo v zgornjo enačbo, dobimo

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2GM}{c^2r} & -\frac{2GyL_z}{c^4r^3} & \frac{2GxL_z}{c^4r^3} & 0 \\ -\frac{2GyL_z}{c^4r^3} & 1 + \frac{2GM}{c^2r} & 0 & 0 \\ \frac{2GxL_z}{c^4r^3} & 0 & 1 + \frac{2GM}{c^2r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{2GM}{c^2r} \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Iz zadnje enačbe (40) izračunamo $g'_{\mu\nu}$:

$$g'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2GM}{c^2r} & \frac{4GMv}{c^2r} - \frac{2GyL_z}{c^4r^3} & \frac{2GxL_z}{c^4r^3} & 0 \\ \frac{4GMv}{c^2r} - \frac{2GyL_z}{c^4r^3} & 1 + \frac{2GM}{c^2r} & 0 & avt \\ \frac{2GxL_z}{c^4r^3} & 0 & 1 + \frac{2GM}{c^2r} & 0 \\ 0 & avt & 0 & 1 + \frac{2GM}{c^2r} \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Tu je potrebno opozoriti, da smo zanemarili vsi člene v katerih nastopa kvadrat pospeška a ali pa produkt aGM/r. V primeru Zemlje je to popolnoma upravičeno, saj gravitacija le rahlo ukrivi prostor ($GM/c^2r \ll 1$). Od tod izračunamo vse potrebne Christoffelove simbole po enačbi (37) in jih vstavimo v enačbo gibanja smeri giroskopa. Končni izraz za gibanje smeri vrtavke v prostoru lahko v vektorski obliki zapišemo kot

$$\frac{d\mathbf{n}}{d\tau} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{n}, \tag{45}$$

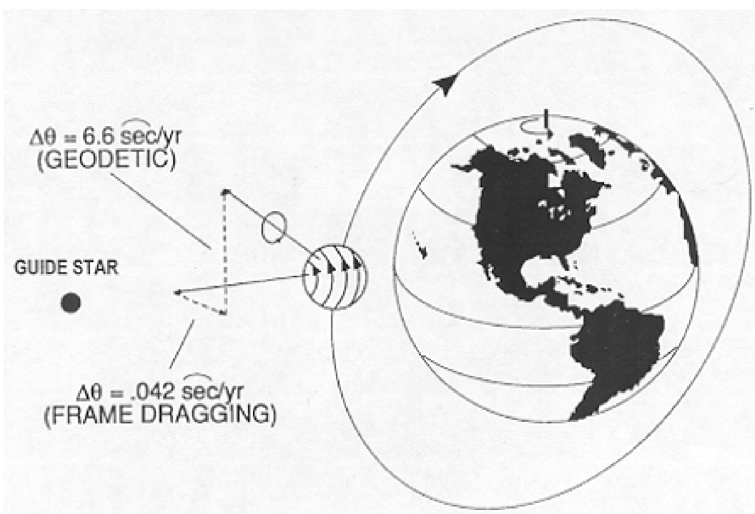
kjer smo z $\mathbf{\Omega}$ označili kotno hitrost skupne precesije. Sestavljena je iz dveh pomembih členov,

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega} &= \mathbf{\Omega}_G + \mathbf{\Omega}_{LT} = \\ &= \frac{3}{2}\frac{GM}{c^2r^3}\mathbf{r} \times \mathbf{v} + \frac{G}{c^3r^3}\left(\frac{3\mathbf{r}}{r^2}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{L}\right). \end{aligned} \tag{46}$$

Vektor $\mathbf{L}$ tu označuje spinsko vrtilno količino Zemlje. Prvi prispevek v zgornji enačbi imenujemo geodetska precesija, drugi člen pa je poimenovan po dveh avstrijskih fizikih, Josephu Lenseju in Hansu Thirringu, ki sta prva napovedala tovrstno precesijo. Celoten prispevek tega člena je posledica relativistične obravnave.

6 Gravity Probe B

To sondo so poslali v vesolje leta 2004 z namenom, da izmeri efekta obeh precesij. Geodetska precesija za Zemljo znaša 6.6 ločne sekunde na leto, precesija Lenseja in Thi-



Slika 4: Skica orbite sonde GP-B.

rringa pa le 0.042 ločne sekunde. Meritev je zaradi tako majhnih odmikov zelo zahtevna.

Sonda kroži po polarni orbiti, na krovu ima štiri zelo natančne giroskope, ki so obrnjeni proti oddaljeni zvezdi, tako da vsi hkrati merijo oba efekta.