

# Libracija lune

Domen Mlakar, Milan Grkovski, Gabriela Hladnik, Alexander Jerman

22. september 2006

## Gibanje lune

### 1. Libracija

Pojem libracija prihaja iz latinske besede libro, in pomeni počasno nihanje (lahko tudi samo navidezno). V astronomiji je to navadno nihanje satelita, ki ga opazujemo iz telesa, okoli katerega satelit kroži. V našem primeru torej opazujemo libracijo - navidezno nihanje lune za opazovalca na zemlji. Zaradi medsebojnega vpliva sta orbitalna perioda in lunin obrat okoli svoje osi točno usklajena, toda libracija nam omogoča, da z zemlje vidimo več kot le polovico luninega površja (59%).

Poznamo tri vrste libracije.

- Višinska libracija (*libration in latitude*), je navidezno nihanje lune, ki ga povzroči dejstvo, da je lunina os vrtenja nagnjena na revolucijski tir okoli zemlje. To je ista stvar kot nagnjenost zemeljske osi na ekliptiko, zaradi česar poznamo letne čase.
- Širinska libracija (*libration in longitude*). Luna navidezno niha zaradi eliptične orbite, po kateri luna potuje okoli zemlje. Zaradi tega vrtenje lune nekaj časa 'prehiteva', nekaj časa pa 'zaostaja' za luninim položajem, saj se luna po eliptični orbiti ne giblje enakomerno. **Naša naloga je bila opazovati to libracijo po širini.**
- Dnevna libracija (*diurnal libration*) je navidezno nihanje, posledica položaja na zemlji, s katerega opazovalec gleda luno. Ker luna in zemlja dnevno krožita, se s tem premika tudi položaj opazovalca na zemlji glede na luno. Ta libracija je najmanjša.

### 2. Newtonov zakon

Najprej iz Newtonovega zakona in zakonov o ohranitvi energije ter gibalne količine izpeljimo trajektorijo, po kateri se giblje satelit okoli zemlje.

$$\vec{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2} = -\vec{F}_{21} \quad (1)$$

Če vpeljemo  $x_c = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$ ,  $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ , ter enačbi seštejemo in odštejemo, dobimo:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_c = F_{12} + F_{21} = 0 \quad \text{in} \quad \ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{\mu}.$$

Ker smo definirali *reducirano maso*  $\mu$ , sedaj postavimo gibalno količino sistema:  $\vec{p} = \mu\dot{\vec{r}}$ , torej je vrtilna količina  $\Gamma = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (\mu\dot{\vec{r}}) = \mu(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$ . Vidimo da je  $\frac{d\Gamma}{dt} = \mu(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \mu\ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F}$ , ker pa so sile centralne, sledi da je:  $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$ , torej je vrtilna količina

$$\Gamma = \text{konst.} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}. \quad (2)$$

Poglejmo si še, kaj se dogaja z energijo (oz. kako se do nje dokopljemo). Zakon, ki nam uravnava gibanje, lahko zapišemo takole:  $\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{r}$ . Sledimo nekaj identitetam:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{c}{r^3}\vec{r} = 0 \quad / \cdot \dot{\vec{r}}, \quad c = \frac{Gm_1m_2}{\mu}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}} + \frac{c}{r^3}\vec{r}\dot{\vec{r}} &= 0 \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2\right) + \frac{c}{r^3}r\dot{\vec{r}} &= 0 \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{c}{r}\right) &= 0 \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2 - \frac{c}{r}\right) &= 0, \text{ to pa nam da}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2 - \frac{c}{r} = \xi, \quad (3)$$

$\xi$  konstanta, in iz enot vidimo, da je to specifična energija, t.j. energija na enoto mase našega sistema.

Sedaj, nas zanima oblika poti, po kateri se telesi gibljeta, zato zopet izhajamo iz gibalne enačbe:

$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{\mu}$ .  $\vec{F}$  je centralna sila, zato je z njo (v polarnih koordinatah) povezan samo radialni del  $\ddot{\vec{r}}$ , ki se glasi:  $\ddot{\vec{r}} = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$ . Iz že prej napisanega ohranitvenega zakona za gibalno količino napišemo  $L = \vec{r} \times (\mu\dot{\vec{r}})$ , kjer podobno učinkuje samo tangencialni del  $\dot{\vec{r}} = r\dot{\varphi}$ , torej  $L = \mu r^2\dot{\varphi}$ . Sledi:

$$\frac{\vec{F}}{\mu} = \ddot{\vec{r}} \rightarrow \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \ddot{r} - r\frac{L^2}{\mu^2 r^4} = \frac{F}{\mu}.$$

Uporabimo  $L = \mu r^2\dot{\varphi}$  in dobimo  $d\varphi = \frac{L}{\mu r}dt$ , in sedaj diferencialno enačbo prevedemo na odvode po  $\varphi$ .

$$\frac{L}{\mu r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{L}{\mu r^2} \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right) - \frac{L^2}{\mu^2 r^3} = \frac{F}{\mu}$$

Uvedemo novo spremenljivko  $u = \frac{1}{r}$ , ( $du = -\frac{1}{r^2}dr$ ), tako da postane naša enačba (po množenju z  $\frac{\mu^2}{u^2 L^2}$ )

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + u = -\frac{F\mu}{u^2 L^2} = \frac{Gm_1 m_2 \mu}{L^2} \quad (\text{spomnimo se da, je sila } F(r) = F\left(\frac{1}{u}\right) \propto -u^2).$$

Rešitev diferencialne enačbe je  $u(\varphi) = A \cos(\varphi + \Phi) + \frac{Gm_1 m_2 \mu}{L^2}$ . Zapišemo lahko enačbo za radij:

$$r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)} = \frac{1}{\frac{Gm_1 m_2 \mu}{L^2} + A \cos(\varphi + \Phi)}. \quad (4)$$

$A$  in  $\Phi$  sta integracijski konstanti. Enačbo primerjajmo z splošno enačbo stožnic:  $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$ . V (4) vidimo podobnost, zato prepišimo v:

$$r(\varphi) = \frac{\frac{L^2}{Gm_1 m_2 \mu}}{1 + \frac{AL^2}{Gm_1 m_2 \mu} \cos(\varphi + \Phi)}.$$

Tedaj sta

$$p = a(1 - \varepsilon^2) = \frac{L^2}{Gm_1 m_2 \mu},$$

$$\varepsilon = \frac{AL^2}{Gm_1 m_2 \mu},$$

$\Phi$  pa je časovna konstanta.

### 3. Enačbe elipse

Radij elipse opišemo

- (a) s prej navedeno enačbo stožnic:  $r = \frac{p}{1+\varepsilon \cos \varphi} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos \varphi}$ , kjer je  $\varphi$  kot med perihelijem, goriščem in točko na elipsi - **prava anomalija**.
- (b) v kartezičnem kootdinatnem sistemu: vzemimo da je  $E$  središčni kot - tekstbfekscentrična anomalija. Tedaj opišemo (glej sliko) radij-vektor elipse  $\vec{r} = (a \cos E - e, b \sin E)$ ,  $e$  je goriščna razdalja.

#### 4. Odvisnost kotov $E$ in $\varepsilon$

Najprej izračunamo odvisnost kota  $\varphi$  od kota  $E$ . Nato izračunamo odvisnost  $E = E(t)$  in uporabimo zvezo med  $E$  in  $\varphi$ . Na koncu bomo izrazili  $r$  kot sestavljeno funkcijo  $r = r(E(\varphi(t))) = r(t)$ .

Najprej izrazimo dolžino  $r = r(E)$ :

$$\begin{aligned} r^2 &= b^2 \sin^2 E + (a \cos E - e)^2 = b^2 \sin^2 E + a^2(\cos^2 E - 2\varepsilon \cos E + \varepsilon^2) = \\ &= a^2 \cos^2 E - 2a^2\varepsilon \cos E + a^2\varepsilon^2 + a^2 \sin^2 E - e^2 \sin^2 E = \\ &= a^2(1 - 2\varepsilon \cos E + \varepsilon^2(1 - \sin^2 E)) = a^2(1 - 2\varepsilon \cos E + \varepsilon^2 \cos^2 E) = \\ &= a^2(1 - \varepsilon \cos E)^2 \end{aligned}$$

Izrazimo  $r^2$  v obeh oblikah

$$\begin{aligned} \frac{a^2(1-\varepsilon^2)^2}{(1+\varepsilon \cos \varphi)^2} &= a^2(1 - \varepsilon \cos E)^2 \\ \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon \cos \varphi} &= (1 - \varepsilon \cos E) \end{aligned}$$

Uporabimo trik:

$$1 - \varepsilon \cos E = 1 - \varepsilon + \varepsilon - \varepsilon \cos E = 1 - \varepsilon + \varepsilon(1 - \cos E) = 1 - \varepsilon + 2\varepsilon \sin^2 \frac{E}{2}$$

in tako imamo

$$(1 - \varepsilon) + 2\varepsilon \sin^2 \frac{E}{2} = (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon) \frac{1}{1 + \varepsilon - 2\varepsilon \sin^2 \frac{E}{2}}$$

Leva stran in imenovalec na desni strani sta oblike  $1 + X \sin^2 a$ .

$$\begin{aligned} 1 + X \sin^2 a &= \sin^2 a + \cos^2 a + X \sin^2 a = \\ &= \cos^2 a + \sin^2 a(1 + X) = \cos^2 a(1 + \tan^2 a(1 + X)) = \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 a} (1 + \tan^2 a(1 + X)) \end{aligned}$$

Prepišimo sedaj to v naš račun in dobimo:

$$\frac{1 + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \tan^2 \frac{E}{2}}{1 + \tan^2 \frac{E}{2}} = \frac{1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \tan^2 \frac{\varphi}{2}},$$

kar pa se poenostavi v

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \tan \frac{\varphi}{2},$$

$$\varphi = 2 \arctan \left[ \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \tan \frac{E}{2} \right].^1$$

#### 5. Časovna odvisnost kota $E$

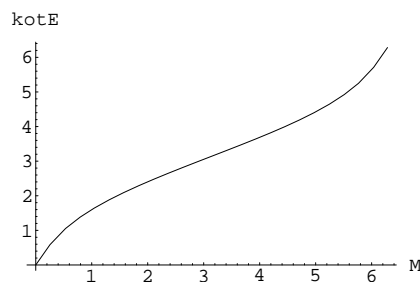
Sedaj lahko izrazimo  $r = r(E)$ . Že zgoraj smo ugotovili, da je ploščinska hitrost konstantna:  $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{L}$ . Uporabimo zapis v kartezičnih

<sup>1</sup>Previdnost pri obravnavanju rešitev trigonometričnih funkcij je tukaj odveč, saj ležita kota  $E$  in  $\varphi$  vedno v istem kvadrantu.

koordinatah  $\vec{r} = (a \cos E - e, b \sin E)$  ter  $\dot{\vec{r}} = (-a \sin E, b \cos E) \dot{E}$ . Tako postane prejšnji izraz diferencialna enačba:  $(1 - \varepsilon \cos E) \dot{E} = \frac{L}{\mu ab}$ , rešitev le te pa:

$$E - \varepsilon \sin E = \frac{L}{\mu ab} (t - t_0) = \mathbf{M}^2$$

$M = M(t)$  ne moremo izraziti z elementarnimi funkcijami, zato jo izračunamo z iteracijo, ki pri majhnem argumentu  $\varepsilon$  ni dolgotrajna. To naredimo na računalnik, npr. v programu *Mathematica*<sup>3</sup>. Spodnji graf prikazuje približno obnašanje kota  $E$  v času za  $\varepsilon = 0.6$ .

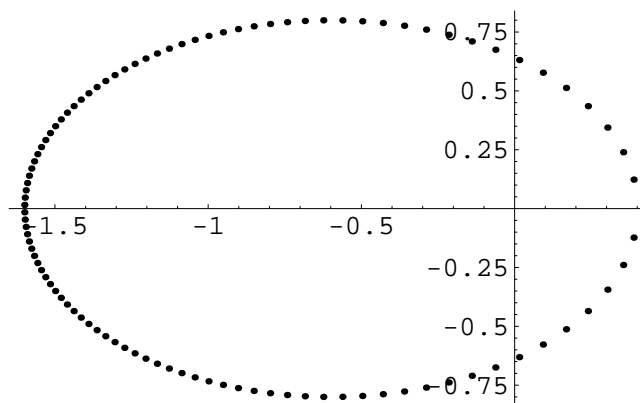


Slika 1:  $E = E(M)$ ,  $\varepsilon = 0.6$ .

Slednjo odvisnost preverimo tako, da zapišemo radij  $\vec{r}$  v kartezičnem koordinatnem sistemu

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} (1 - \cos E).$$

Ker poznamo odvisnost  $E(t)$  in  $\varphi(E)$ , lahko izračunamo  $\vec{r}(t)$ . To narišemo in dobimo približno spodnjo sliko.<sup>4</sup>



Slika 2:  $\vec{r}(t)$ .

<sup>2</sup>M se v splošnem imenuje **srednja anomalija**

<sup>3</sup>Poglej matematični zvezek '*libracija.nb*': 'auxKotE' in 'kotE'.

<sup>4</sup>Poglej matematični zvezek '*libracija.nb*': 'radVec' in 'radij'.

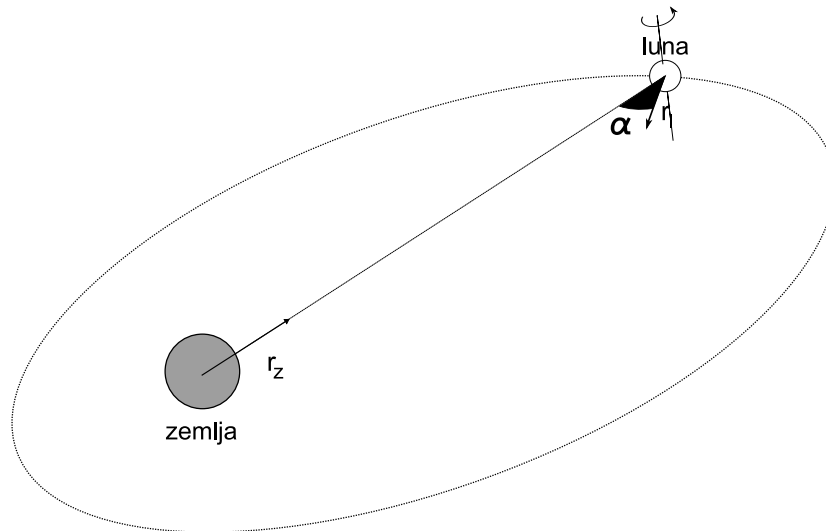
## 6. Libracija lune

Končno imamo pripravljene podatke, ki jih potrebujemo:

- $\vec{r}(t)$
- Poznamo vrtenje lune: v vsakem luninem 'letu' se zgodi tudi en lunin 'dan'. (To pomeni, da traja obrat lune okoli osi natanko toliko časa<sup>5</sup>, kolikor traja lunino potovanje okoli zemlje.) Predpostavimo, da se luna vrti krožno enakomerno.

**Predpostavimo:**

- V času opazovanja se lunin tir glede na zemljo ne obrača.<sup>6</sup>
- Os luninega vrtenja je pravokotna na ravnino kroženja okoli zemlje.<sup>7</sup>
- Predstavljamo si, da stojimo v središču zemlje.<sup>8</sup>



Slika 3:  $\alpha$  je kot med radij-vektorjem in 'obrazom' lune.

Ob teh predpostavkah zlahka izračunamo kot med zveznico zemlja-luna. Če je lunina os pravokotna na njen tir okoli zemlje, se točke na sliki luninega površja 'premikajo' le levo in desno (ne pa gor in dol). Na luninem površju si izberemo točko, in v njej vektor, ki nam opisuje vrtenje na luninem površju:  $\vec{r}_{luna} = \begin{pmatrix} \cos \omega_l t \\ \sin \omega_l t \end{pmatrix}$ , pri čemer je  $\omega_l$  krožna frekvenca lune ( $\frac{2\pi}{T}$ ). Tedaj je kot med vektorjema radij zemlja-luna in 'obrazom' lune kot  $\alpha$  na sliki. Izračunamo ga preprosto z skalarnim produktom:

$$\vec{r}_{luna} \cdot \vec{r} = |\vec{r}_{luna}| |\vec{r}| \cos \alpha.$$

<sup>5</sup>T = 27.321 dni

<sup>6</sup>V resnici se tir obrača, saj na luno močno vpliva tudi sonce. Perioda obračanja luninega tira okoli zemlje je  $P \approx 19let$

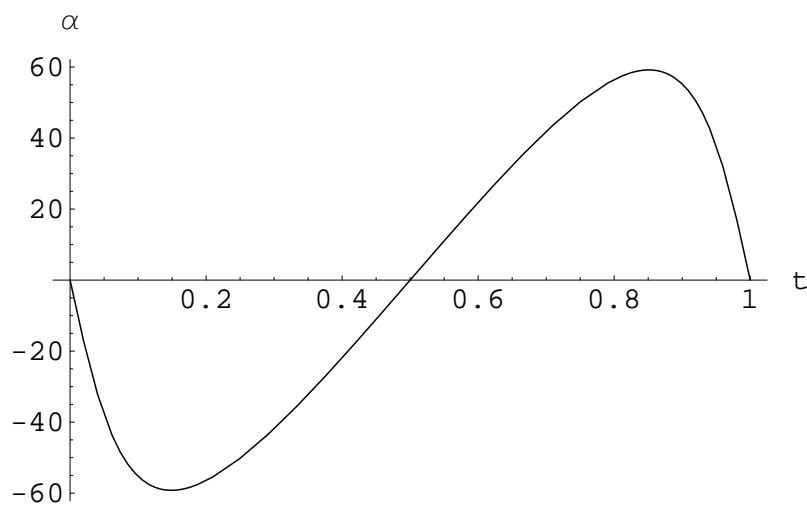
<sup>7</sup>V resnici je lunnina os na ravnino kroženja nagnjena za  $\alpha = 88.4576^\circ$

<sup>8</sup>Ker seveda nismo v središču, ampak nekje v obsegu polmera zemlje, razdalja zemlja-luna pa je približno 57 polmerov zelje, smo se tem zanemarili napako  $\beta \approx \frac{1}{57} \approx 1^\circ$

Kot  $\alpha$  je torej:

$$\alpha = \arccos \frac{\overrightarrow{r_{luna}} \cdot \vec{r}}{r_{luna} r}.$$

Nazorno si vse skupaj lažje predstavljamo, če pustimo, da računalnik izračuna in nariše sliko.<sup>9</sup>



Slika 4: Teoretična napoved libracijskega kota.  $\varepsilon = 0.5$ .

---

<sup>9</sup>Poglej matematični zvezek '*libracija.nb*': '*lunaObraz*', '*lunaObrazSmer*' in '*alfa*'.

## Meritve

### 1. Priprave

Po premisleku (in pogovoru s pristojnimi) smo se odločili, da lune ne bomo slikali na teleskopu Vega, pač pa bomo slikanja naredili s fotoaparatom. Razlog za to je bila predvsem zasedenost teleskopa, za naše opazovanje pa smo rabili čimveč slik, kar ni šlo v urnik na Golovcu. Vseeno smo imeli zadovoljivo opremo, in si zadali cilj - slikati luno vsak dan v mesecu. Razdelili smo si 'tedne' v katerih je vsak iz skupine slikal luno, pred tem pa se nekajkrat dobili in skupaj preizkusili opremo in se nanjo navadili. Pred slikanjem smo na [www.euroweather.com](http://www.euroweather.com) pogledali kdaj je luna vidna na našem delu neba.

### 2. Slikanje

Luno smo slikali po sledečem 'postopku'.

Najprej smo nastavili najboljše gorišče. V ta namen smo v čimkrajšem času poslikali serijo slik lune pri različnih goriščnih razdaljah, nato pa na zaslonu digitalnega fotoaparata primerjali ostrino slik. S tem smo izbrali za trenutne pogoje najboljšo nastavitvev teleobjektiva.

Za slikanje smo seveda uporabili stativ. Pri vsakem slikanju lune smo poskušali luno ujeti na sredino slike.

Da bi dobili kar se da ostre slike luninega površja, smo nato luno slikali pri različnih časih zaslone (ISO speed 400, aperture F0). Iz teh serij slik smo šele na velikem zaslonu (PC) izbrali najboljši posnetek.

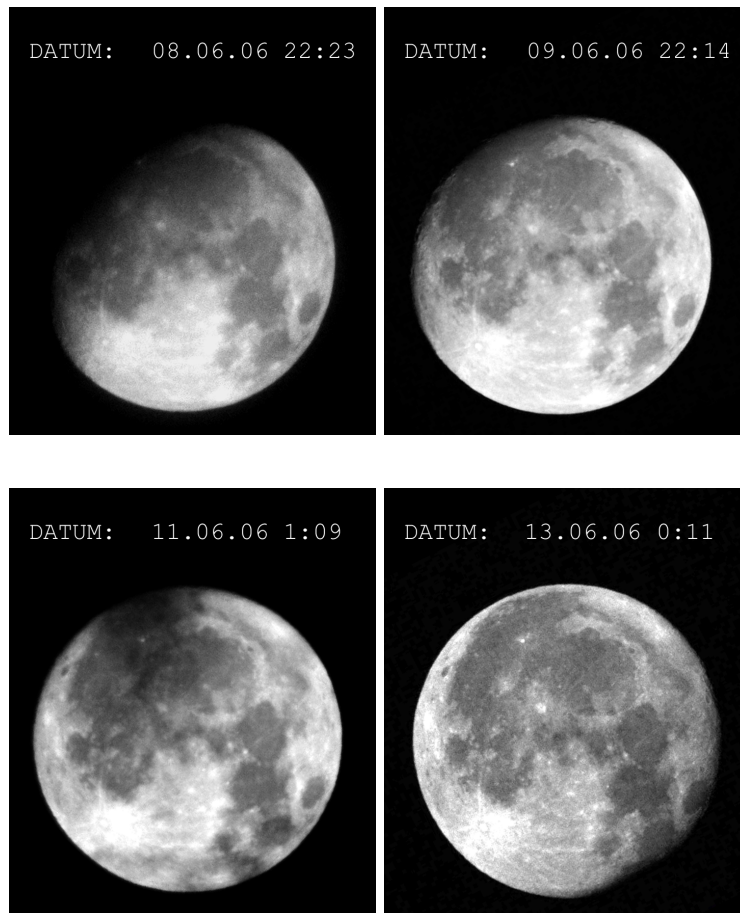
Pri slikanju lune nam je ponagajalo vreme. Tako smo dobili slike le na datume: 04.05., 11.05., 16.05., 31.05., 07.06., 08.06., 09.06., 11.06., 13.06. Manjajo nam predvsem lune zadnjega krajca, nekaj slik pa je tudi hudo slabe kvalitete (megla). Na nekatere jasne noči je bila luna prenizko nad obzorjem, da bi jo slikali (iz Ljubljane).

### 3. Obdelava slik in meritve

Na računalniku smo izbrali najboljše slike lune na posamezen datum, nato pa jih v programu za urejanje slik obdelali. Ker smo se zanimali le za libracijo po širini, smo vse slike **obrnili** v 'enak položaj'. S tem smo hkrati odpravili problem 'zvrnjenih slik'. Med obdelavo slik smo slike razbarvali (desaturate), ter jim popravili kontrast in barvne krivulje (levels/histogram).





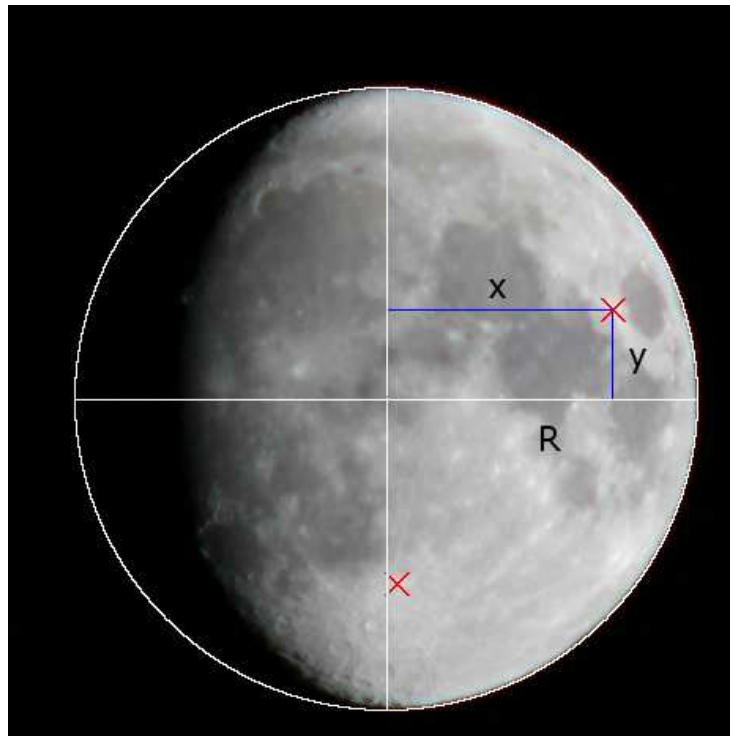


Slika 5: Obdelane

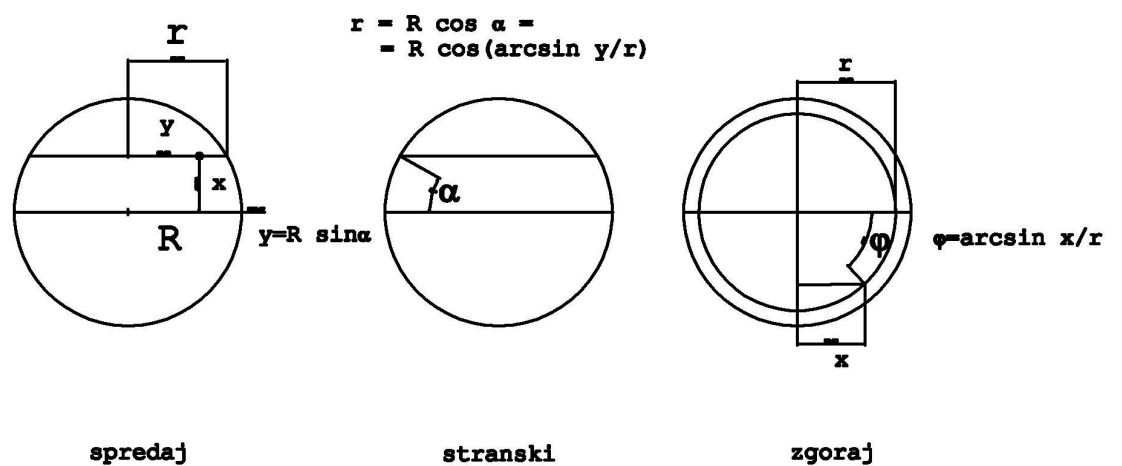
Na slikah smo izbrali nekaj prepoznavnih točk (kraterjev, lis), ki so se pojavljali na več slikah. To je potrebno zato, da smo lahko opazovali navidezno premikanje oziroma obračanje lune na slikah z zemlje. Nato smo s pripomočki na računalniku premerili potrebne podatke kar v slikovnih točkah (pixels).

Podatke smo pretvorili v kot, ki ga točka na površini lune (na sliki) oklepa z ravnino ki jo definirata premica zemlja-luna in (predpostavljeno) nanjo pravokotna os vrtenja lune. Kako smo to storili, kaže spodnja slika.

$$\varphi = \arcsin \frac{x}{R \cos \arcsin \frac{y}{R}}$$



Slika 6: Izbrane točke na sliki luninega površja in izmerjeni podatki.



Slika 7: Iz treh luninih projekcij izračunamo kot, ki ga oklepa točka na površju.

#### 4. Rezultati

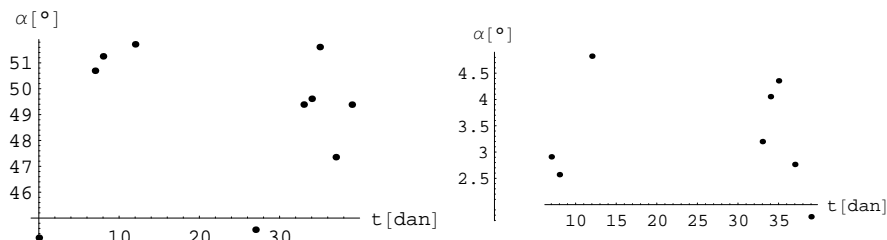
##### 1. točka na luninem površju

slika	R [px]	x [px]	y [px]	$\varphi$
CRW_9656.png	196	129	65	44,2
CRW_9690.png	197,5	147	54	50,7
CRW_9703.png	197,5	151	39	51,3
CRW_9715.png	202	158	17	51,7
CRW_9744.png	193,5	126	72	44,6
CRW_9773.png	197,5	144	55	49,4
CRW_9774.png	196,5	143	58	49,6
CRW_9779.png	201,5	153	50	51,6
CRW_9780.png	206,5	147	52	47,4
CRW_9786.png	207	155	34	49,4

##### 2. točka na luninem površju

slika	R [px]	x [px]	y [px]	$\varphi$
CRW_9656.png	196	/	/	/
CRW_9690.png	197,5	8	119	2,9
CRW_9703.png	197,5	7	121	2,6
CRW_9715.png	202	13	130	4,8
CRW_9744.png	193,5	/	/	/
CRW_9773.png	197,5	9	114	3,2
CRW_9774.png	196,5	11	120	4,1
CRW_9779.png	201,5	12	125	4,4
CRW_9780.png	206,5	8	123	2,8
CRW_9786.png	207	5	129	1,8

To so v grobem prvi podatki. To nam da spodnji prikaz v časovni skali.



Slika 8: Modra in rdeča kažeta libracijo dveh različnih točk na luni.

Slika ni dokončna, manjkata nam ocena napake in primerjava s teoretično krivuljo. Šele potem lahko sklepamo na pravilnost teoretične napovedi. Vseeno vidimo nakazano nihanje v času, kar nam daje upanje na vsaj približno ujemanje s teorijo.

Najprej pogledjmo napake pri merjenju.

#### 5. Napake

Ker obravnavamo libracijo lune, bomo skušali vse napake izraziti v stopinjah, torej v obliki kota, za katerega smo se zmotili. Tako bodo tudi napake nazorne in predstavljive.

Za prve napake ki so sistematčne narave smo že povedali v zgornjih

odstavkih. To so napake, ki so posledica napačnih oziroma poenostavljenih predpostavk. Dnevna libracija - ne stojimo na zveznici zemlja-luna ( $\approx 1^\circ$ ), nepravokotnost lunine osi na ravnino kroženja ( $\approx 1.5^\circ$ ).

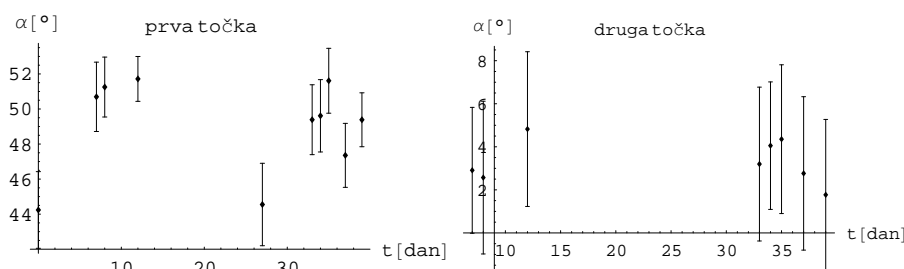
Te napake bomo pri obravnavi podatkov sicer upoštevali, toda ocena prve napake je prevelika, saj smo redko slikali luno, ko smo bili - glede na luno - na robu zemlje, nagnjenost lunine osi pa se kaže v libraciji po širini, in ne vpliva veliko na napako naše meritve. Vseeno bodimo pozorni na ta dva prispevka.

Bolj pozorno si pogledjmo napake, ki so posledica računanja kota iz slik, ki smo jih posneli.

Slike smo obračali, da smo dobili sekvenco slik, ki v vertikalni smeri ni 'nihala'. Tako smo slike obrnili, in s tem pridobili napako, saj v resnici luna niha tudi navpično. Zaradi tega in zaradi nenatančnosti obračanja smo ocenili napako na 4 slikovne pike.

Pri meritvi položaja kraterja smo si izbrali natančno določen del kraterja, in na vseh slikah izmerili navidezni radij lune ( $R$ ), in razdaljo izbrane točke od geometrijskih osi ( $x$ ,  $y$ ). Merili smo v slikovnih pikah, pri nepopolnih (neokroglih) slikah lune smo si pomagali tako, da smo čez luno narisali popoln krog, tako da je obrisal del lune, ki je bil na sliki.

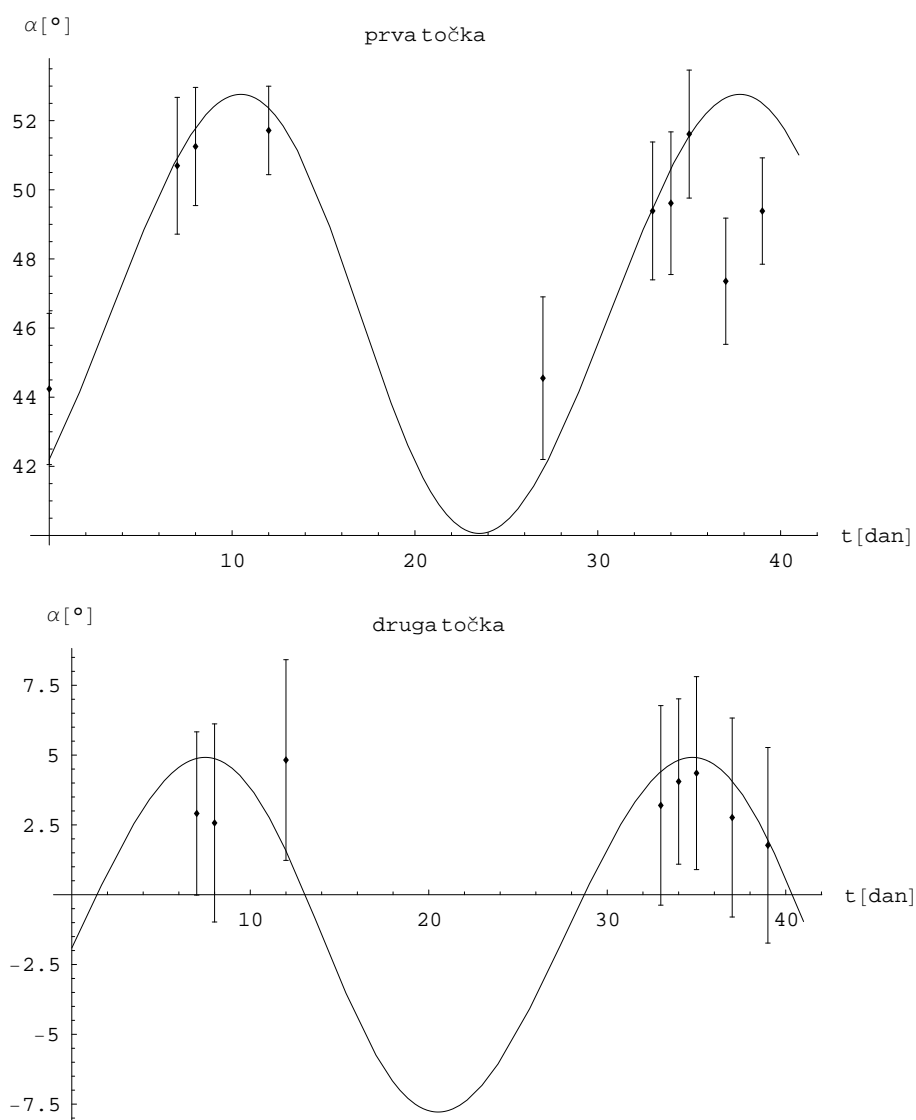
Iz merskih napak ( $\pm 6$  px/meritev) smo s pomočjo odvodov dobili oceno za napako rezultata, ker pa so odvodi precej utrujajoči, smo prepustili nevhvaležno delo računalniku.<sup>10</sup>



Slika 9: Grafa kazeta libracijo dveh različnih točk na luni z oceno napake.

Ostane nam še, da pogledamo, kako se meritve ujemajo z napovedmi. Preostane nam še, da združimo teoretično sliko in naše meritve. Tokrat pri teoretični napovedi nastavimo dva parametra -  $t_0$  in  $\delta$ , ki nam povesta, kdaj in kateri del lune opazujemo.

<sup>10</sup>Poglej matematični zvezek 'libracija.nb': MERITVE in PODATKI



Slika 10: Primerjava teoretične krivulje z izmerjenimi podatki.

## 6. Komentarji rezultatov

Če pogledamo zadnji dve sliki, ki nam prikazujeta ujemanje naših meritev in izračunov z napovedjo, ki jo da teoretična podlaga, vidimo ujemanje, ki pa ponekod močno odstopa.

Strinjamo se, da smo imeli mnogo premalo podatkov, da bi lahko kvalitativno izločili 'slabe' oziroma očitno napačne meritve, ki so posledica vrtenja in obdelave slik na računaliku. To je po našem mnenju glavni krivec za točke, ki na grafu 'štrlijo' iz linije.

Nujno je omeniti dodatno napako ( $\max 2^\circ$ ) zaradi položaja na zemlji in nagnjenosti lunine osi.

Glavna pomanjklivost naših slik je v tem, da pravzaprav nimamo slik iz 'spodnjega dela' grafa, to pomeni slik zadnjih krajev lune. Tako smo dejansko poslikali (2x) le debeljenje lune, ne pa tudi crkovanja. Omeniti moramo, da smo meritve izvedli na navpično poravnanih slikah (oblike lune C O D ) in ne na slikah, ki so priložene (pravzaprav so slike iste, le drugače so obrnjene). Dejstvo, da nimamo nekaterih položajev lune, je vidno na grafu in močno oslabi naše vedenje o pravilnosti predpostavk oziroma o natančnosti meritev. Tako lahko le na podlagi dveh nakazanih vrhov nastavimo parametre za usklajevanje (fitting).

Mislimo, da nam je zadana naloga uspela, saj je na slikah razločno videti 'nihanje' oziroma libracijo točk na luninem površju. Žal nam je, da nismo poslikali več slik (zadali smo si slikanje lune vsak dan), saj je ravno pomanjkanje slik okrnilo naše meritve, ki bi bile lahko dosti bolj prepričljive. Vseeno smo veseli našega uspeha.

**Oprema**

- Fotoparat: Canon EOS 300D DIGITAL
- Objektiv: Carl Zeiss Jena Fernobjektiv 8/500
- stativ za fotoaparat
- PC, programska oprema za obdelavo slik (GIMP, Photoshop)





### Lunina izkaznica

Obseg orbite	2,413,402 km (0.016 AU)
Ekscentričnost	0.0554
Perihelij	363 104 km (0.0024 AU)
Ahelij	405 696 km (0.0027 AU)
Povp. oddaljenost	362 546 km
Siderealna perioda	27.321 66155 d (27 d 7 h 43.2 min)
Sinodična perioda	29.530 588 d (29 d 12 h 44.0 min)
Povp. orbitalna hitrost	1.022 km/s
Max. orbitalna hitrost	1.082 km/s
Min. orbitalna hitrost	0.968 km/s
Inklinacija se spreminja med	28.60° in 18.30° (5.145 396° na ekliptiko)
Perioda pomladišča	18.6 let
Perioda kot med	
pomladiščem in perihelijem	
v orbitalni ravnini	8.85 let
<b>Fizikalne lastnosti</b>	
Premjer na ekvatorju	3,476.2 km (0.273 Zemlje)
Premjer na polih	3,472.0 km (0.273 Zemlje)
Stisnjenost	0.0012
Površina	$3.793 \times 10^7 \text{ km}^2$ (0.074 Zemlje)
Volumen	$2.1958 \times 10^{10} \text{ km}^3$ (0.020 Zemlje)
Masa	$7.347673 \times 10^{22} \text{ kg}$ (0.0123 Zemlje)
Povprečna gostota	$3,346.2 \text{ kg/m}^3$
Gravitacijski pospešek	
na ekvatorju	$1.622 \text{ m/s}^2$ , (0.1654 g)
Ubežna hitrost	$2.38 \text{ km/s}^{-1}$
Rotacijska perioda	27.321 661 d
Rotacijska hitrost	$16.655 \text{ km/h}^{-1}$ (na ekvatorju)
Nagnjenost osi	$1.5424^\circ$
Albedo	0.12
Magnituda	-12.74
Temperatura na površju	min. 40 K/povp. 250 K/max. 396 K