

Modeli zvezd

Štefan Krek

21. april 2006

1 Uvod

V astrofiziki bi radi naredili model zvezde, ki bi jo čim boljše opisal vse od nastanka do njenega konca. Zvezdo opišemo s parametri kot so gostota $\rho(r, t)$, temperatura $T(r, t)$, tlak $p(r, t)$, proizvodnja energije $\epsilon(r, t)$

Naša naloga je čim boljše opisati zvezdno strukturo in njen razvoj. Opis zvezde čez celotno njeno življenje je prezapleten, da bi ga opisali z enim modelom, zato modeliramo zvezde tako, da za vsak njen stadij uporabimo drug model (npr. za nastanek uporabimo en model, za gorenje vodika drug model, . . .).

V našem primeru se bomo ukvarjali z modelom zvezde, ki je v svojem jedru že porabila ves vodik, tako da v jedru več ne potekajo jedrske reakcije. Jedro je izotermno in je iz helija. Okoli jedra je tanka plast vodika, kjer potekajo jedrske reakcije. Okoli te plasti pa je sevalna ovojnica.

2 Politropni model zvezde

Politropni model zvezde se uporablja v primeru, ko se preneša energija iz ene plasti v drugo s konvekcijo. Konvekcija je najučinkovitejši način prenosa energije. Tak model ustreza tudi v našem primeru, ko imamo izotermno jedro.

Hidrostatsko ravnovesje v zvezdi opišemo z enačbo:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}, \quad (1)$$

kjer je m masa znotraj radija r , G gravitacijska konstanta in P tlak pri radiju r . Gravitacijski potencial Φ_g je definiran

$$\nabla^2 \Phi_g = 4\pi G \rho, \quad (2)$$

ki ga zapišemo v sferičnih koordinatah tako:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi_g}{\partial r} \right) = 4\pi G \rho, \quad (3)$$

V našem primeru se bomo ukvarjal le z stacionarnim primerom, tako, da lahko v enačbi (1) časovni člen izpustimo.

Pri politropnem modelu uporabimo nalednjo enačbo stanja:

$$P = K\rho^\gamma = K\rho^{1+\frac{1}{n}}, \quad n = \frac{1}{\gamma - 1}, \quad (4)$$

kjer je γ politropni eksponent in n politropni indeks. Če je jedro izotermno je politropni eksponent enak 1. Tako, da uporabimo za enačbo stanja kar enačbo stanja za idealni plin. Iz tega sledi, da je

$$K = \frac{\mathfrak{R}T}{\bar{\mu}},$$

kjer je \mathfrak{R} splošna plinska konstanta, T temperatura in $\bar{\mu}$ povprečna molska masa.

Sedaj nas zanima, kako se spreminja gostota snovi v jedru v odvisnosti od radija. Najprej prepisemo stacionarno enačbo hidrostatskega ravnovesja v obliko

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{d\Phi_g}{dr}\rho, \quad (5)$$

pri čemer smo upoštevali zvezo

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$$

in enačbo za gravitacijski potencial. Ko vsavimo v levo starn enačbe (5) enačbo stanja(4) in privzamemo, da je politropni eksponent γ enak 1 dobimo

$$\frac{d\Phi_g}{dr} = -K\rho^{-1}\frac{d\rho}{dr}, \quad (6)$$

Ko zgornji izraz pointegriramo,

$$-\int_{\Phi}^0 \frac{d\Phi_g}{K} = \int_{\rho}^{\rho_c} \frac{d\rho}{\rho}$$

potem dobimo zvezo med centralno gostotao in gostoto pri nekem radiju.

$$\rho = \rho_c e^{-\frac{\Phi_g}{K}} \quad (7)$$

Dobljeno enačbo za gostota vstavimo v enačbo (3)

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr} = 4\pi G \rho_c e^{-\frac{\Phi}{K}} \quad (8)$$

Uvedemo še naslednje brezdimenzijske količine:

$$z = Ar, \quad A^2 = \frac{4\pi G \rho_c}{K}, \quad \Phi = Kw \quad (9)$$

Sedaj lahko zapišemo enačbo (8) v brezdimenzijski obliki:

$$\boxed{\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dw}{dz} = e^{-w}} \quad (10)$$

Zgornji enačbi pravimo izotermna **Lane-Emden**-ova enačba.

Izotermna Lane-Emdenova enačba opisuje zvezde, ki imajo temperaturo neodvisno od radija. Takšne zvezde seveda ne bomo našli, ker bi morala biti neskončno velika. Je pa ta enačba uporabna za izotermno jedro zvezde, ki ima sevalno ovojnico. Centralni pogoji, ki jim mora zadoščati Lane-Emdenova enačba so naslednji:

$$w(0) = 0, \quad \left. \left(\frac{dw}{dz} \right) \right|_{z=0} = 0. \quad (11)$$

2.1 Reševanje izotermne Lane-Emdenove enačbe

Reševanje takšne enačbe je analitično prezahtevno, zato jo reje rešujemo numerično. Uporabimo lahko Mathematico ali pa kateri drug program za reševanje diferencialnih enačb. Pri reševanju uporabimo centralne pogoje, ki smo jih zapisali pod številko (11). Tako dobimo funkcijo $w(z)$, pri čemer teče parameter od 0 do nekega velikega z ($z \rightarrow \infty$).

3 Sevalni model zvezde

Če temperaturni gradient ni tako velik, da bi potekala konvekcija, potem se energija iz plasti v plast prenaša s sevanjem in prevajanjem. Takšen model opišemo s setom diferencialnih enačb za sferno simetrične zvezde:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (12)$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \quad (13)$$

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \epsilon_n - \epsilon_\nu - c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla, \quad \nabla = \nabla_{rad} = \frac{3}{16\pi(4\sigma)G} \frac{\kappa l P}{m T^4} \quad (15)$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{m_i}{\rho} \left(\sum_j r_{ji} - \sum_k r_{ik} \right), \quad i = 1, \dots, I \quad (16)$$

Podobno, kot pri politropnem modelu, se bomo osredotočili le na stacionarne enačbe. Uvedemo tudi brezdimenzijski parameter

$$\xi = \frac{m}{M}$$

in preprišemo enačbe od (12) do (15) v naslednjo obliko:

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{M}{4\pi r^2 \rho} \quad (17)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = -\frac{GM^2}{4\pi r^4} \xi \quad (18)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \xi} = M(\epsilon_n - \epsilon_\nu) \quad (19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = -\frac{3M}{64\pi^2 r^4} \frac{\kappa l}{(4\sigma) T^3} \quad (20)$$

Za reševanje zgornjega sistema enačb je bolj primerno, če uvedemo brezdimenzijske količine:

$$P = \frac{GM^2}{4\pi r^4} y, \quad T = \frac{\bar{\mu}GM}{\mathfrak{R}R} t, \quad r = Rx, \quad m = M\xi \quad (21)$$

Sedaj zapišemo enačbe od (17) do (20) v brezdimenzijski obliki in upoštevamo, da je izsev po ovojnici konstanten.

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{t}{x^2 y} \quad (22)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\xi}{x^4} \quad (23)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \xi} = 0 \Rightarrow L = konst. \quad (24)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = -C \frac{y^a}{t^{a+b+3} x^4} \quad (25)$$

Pri enačbi (25) smo upoštevali, da se absorpcija po zvezdi spreminja po naslednji enačbi:

$$\kappa = \kappa_0 \rho^a T^{-b}, \quad (26)$$

ter uvedli konstanto C:

$$C = \frac{3\kappa_0}{4(4\sigma)(4\pi)^{a+2}} \left(\frac{\mathfrak{R}}{\bar{\mu}G} \right)^{b+4} LR^{b-3a} M^{a-b-3} \quad (27)$$

Tako smo dobili sistem diferencialnih enačb, ki opišejo sevalno ovojnico zvezde. Pri nadaljnjem reševanju sistema enačb smo privzeli, da se absorpcija po ovojnici spreminja po Kramer-ju. Torej pri enačbi (26) vzamemo: $a = 1$, $b = 3.5$ in $\kappa_0 = 7.6 \cdot 10^{20} m^5 kg^{-2} K^{3.5}$, ki jo napoveduje kvantna mehanika. Več o tem piše v literaturi [1, str. 138].

3.1 Reševanje sistema diferencialnih enačb za sevalno ovojnico

Ta sistem rešujemo spet po numerični poti (Mathematica ali kateri drug program). Pri reševanju se pojavi težava, da pri naslednjih robnih pogojih na površini:

$$y(1) = 0, \quad \frac{y(1)}{t(1)} = 0, \quad x(1) = 1 \quad (28)$$

rešitev ne obstaja oziroma divergira. Zato moramo izračunati drugačne robne pogoje. Dobimo jih tako, da se malo premaknemo proti jedru v oojnico. Z deljenjem enačb (23) in (25) dobimo zvezo med tlakom in temperaturo:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\xi}{C} \frac{t^{a+b+3}}{y^a}, \quad (29)$$

z deljenjem enačb (25) in (22) pa dobimo zvezo med temperaturo in radijem.

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -C \frac{y^{a+1}}{t^{a+b+4}} \frac{1}{x^2}, \quad (30)$$

Enačbo (29) integriramo in privzamemo $\xi = 1$. Da zadostimo pogojem na površini $t = 0, y = 0$, mora biti integracijska konstanta enaka 0. Tako dobimo robni pogoj za tlak malo pod površjem.

$$y(1 - \epsilon) = \left(\frac{1}{C} \left(\frac{a+1}{a+b+4} \right)^{a+b+5} \left(\frac{\eta}{1-\eta} \right)^{a+b+4} \right)^{\frac{1}{a+1}} \quad (31)$$

Z integracijo enačbe (30) in upoštevanjem pogoja: če $t = 0 \Rightarrow x = 1$ dobimo robni pogoj za temperaturo:

$$t(1 - \epsilon) = \frac{a+1}{a+b+4} \left(\frac{\eta}{1-\eta} \right) \quad (32)$$

Pri zgornjih dveh pogojih smo uvedli $x = 1 - \eta$, kjer je η majhno število in pomeni pomik za nek del radija v notranjost ovojnice in $\xi = 1 - \epsilon$, kjer pomeni ϵ nek majhen delež mase zunaj radija $x = 1 - \eta$.

4 U-V diagram

Lepljenje izotermnega jedra in sevalne ovojnice je najbolj preprosto v U-V ravnini. Tu definiramo:

$$U = \frac{d \ln m}{d \ln r} \quad V = -\frac{d \ln P}{d \ln r} \quad (33)$$

4.1 U-V diagram za izotemno jedro

Kot vidimo iz enačbe (33) potrebujemo za izračun U in V zvezo med maso in radijem ter tlakom in radijem. Zvezo med maso in radijem dobimo tako, da integriramo diferencial mase od središča zvezde do nekega radija.

$$m(r) = \int_0^r 4\pi\rho r^2 dr$$

Pred integracijo vstavimo v zgornji integral zvezo za gostoto (enačba 7), uporabimo brezdimenzijsko količino za radij $z = Ar$ in Lane-Emdenovo enačbo. Ko enačbo malo polepšamo dobimo iskano zvezo za maso.

$$m(z) = \frac{4\pi\rho_c}{A^3} \left(z^2 \frac{dw}{dz} \right) \quad (34)$$

Zvezo med tlakom in radijem pa dobimo kar iz enačbe stanja $P(z) = K\rho_c e^{-w}$. Sedaj lahko zapišemo zvezi za U in V za izotermno jedro:

$$U = e^{-w} \left(\frac{1}{z} \frac{dw}{dz} \right)^{-1} \quad V = z \frac{dw}{dz} \quad (35)$$

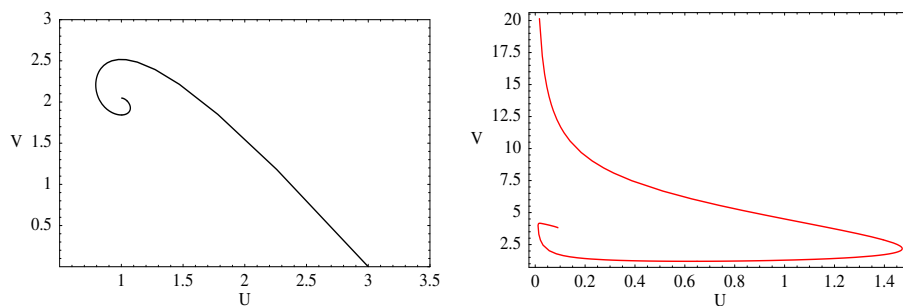
4.2 U-V diagram za sevalno ovojnico

Enačbi (33) najprej zapišemo v brezdimenzijski obliki

$$U = \frac{d \ln \xi}{d \ln x} \quad V = -\frac{d \ln y}{d \ln x},$$

nato pa še uporabimo enačbe od (22) do (25) in dobimo:

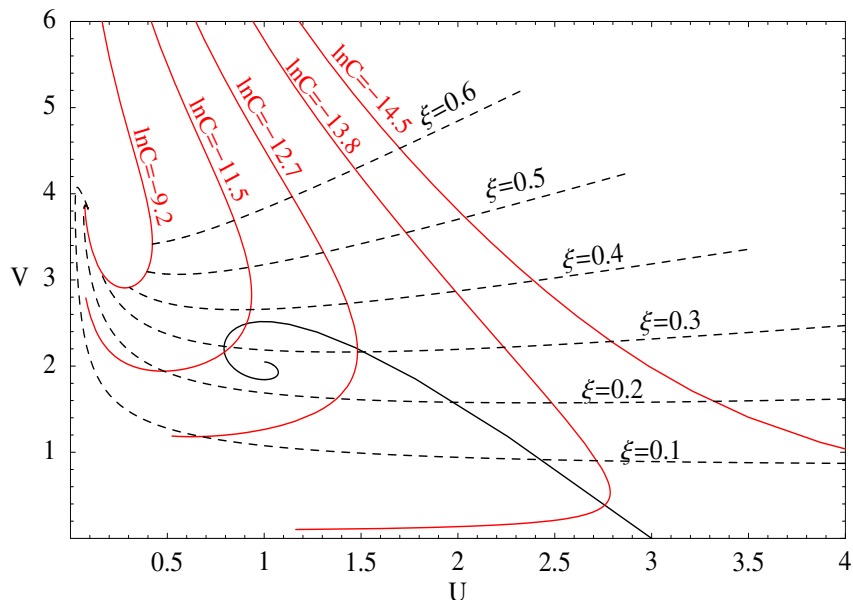
$$U = \frac{x^3 y}{\xi t} \quad V = \frac{\xi}{xt}. \quad (36)$$



Slika 1: U-V diagram za izoterno jedro levo, U-V diagram za sevalno ovojnico pri konstanti $\ln C = -12.7$ desno

4.3 Združevanje jedra in ovojnice

V naslednjem koraku bomo združili izotermno jedro in sevalno ovojnico. Kot smo že omenili je najlažje to storiti v U-V ravnini. Krivulja za izotermno jedro je točno določena, tako da nimamo nobenega prostega parametra. Pri sevalni ovojnici pa imamo prost parameter C , ki pa je odvisen od izseva, radija in mase zvezde kar je razvidno iz enačbe (27). Zato je v U-V grafu mogočih več črt za sevalno ovojnico in s tem tudi več rešitev celotnega problema.



Slika 2: U-V diagram pri različnih konstantah C . Absorpcijski koeficient se spreminja po Kramer-ju. Črtkana črta označuje predele, kjer je zaobjeta enaka masa. Črna črta označuje izotermno jedro, rdeče črte pa označujejo sevalno ovojnico.

Kot vidimo iz zgornjega grafa, ne sekajo vse črte sevalne ovojnice izotermnega jedra. Izkaže se, da mora biti konstanta C med $-13.85 \leq \ln C \leq -11.37$, da dobimo presečišče. Iz grafa je razvidno tudi to, da ne more biti masa izotermnega jedra večja kot približno 38% celotne mase zvezde.

5 Model zvezde

Za primer si oglejmo model pri konstanti $C = e^{-12.7}$. Pri tej konstanti je v jedru približno 30.7% mase celotne mase zvezde. V U-V ravnini se krivulji jedra in ovojnice sekata v točki $A(U, V) = (1.48, 2.20)$. Parameter z pri politropnem modelu pa teče od 0 do 4.82.

Pri našem modelu bi radi, da bi imeli samo en prost parameter, in sicer masa celotne zvezde. Izkaže pa se, da moramo izbrati dva parametra ali centralno temperaturo ali izsev zvezde in maso zvezde. Do tega pride, ker smo reševali enačbe sevalne ovojnice s

privzetkom, da je izsev po ovojnici ves čas konstanten in da vsa energija nastane v zelo tanki lupini okoli jedra.

Torej, če želimo imeti za prost parameter samo maso, moramo upoštevati tudi jedrske reakcije.

5.1 Jedrske reakcije (fuzija)

če imamo plazmo pri dovolj visoki temperaturi, potem se lahko zgodi, da se dve jedri zlijeta in nastane novo jedro. Novo jedro ima manjšo maso kot vsota mas obeh prvotnih jeder. Razlika mase se pretvori v energijo in nevtrine. Pozitivno energijsko bilanco dobimo pri zlivanju jedr, pri katerih je nastalo jedro lažje od železovega jedra.

V primeru, da imamo plazmo v kateri je večinoma ioniziran vodik ter majhen delež težjih elementov (He, N, C, O,...), sta možna dva načina nastajanja helija:

- pp-cikel: Pri tem načinu zlivanja nastaja helij z zlivanjem vodikovih jeder in njegovih izotopov. Pri reakciji lahko sodelujejo tudi litij, berilij in bor (pp2 in pp3). Podrobno shemo pp-cikla najdemo v literaturi [1, str. 162,163]. Sproščeno energijo na enoto časa in mase opišemo z naslednjo enačbo:

$$\epsilon_{pp} = 2.38 \cdot 10^6 \psi f_{11} g_{11} \rho X_1^2 T_6^{-2/3} e^{-33.80/T_6^{1/3}}; \quad T_6 = \frac{T}{10^6} K \quad (37)$$

$$g_{11} = 1 + 0.0123 T_6^{1/3} + 0.0109 T_6^{2/3} + 0.0009 T_6, \quad (38)$$

kjer je ψ faktor prispevka k energiji pri pp2 in pp3. Ta faktor je med 1 in dva, odvisno od temperature in deleža helija. ρ je gostota v cgs enotah, f_{11} je faktor senčenja pri jedrski reakciji, X_1 pa je delež vodika in T temperatura v Kelvinih. ϵ ima enote [erg/ gs].

- CNO-cikel Tu nastaja helij iz vodika s pomočjo ogljika, dušika in kisika. Podrobna shema je prikazana v literaturi [1, str. 164]. Sproščeno energijo pri NCO-ciklu na enoto časa in mase opisuje naslednja enačba:

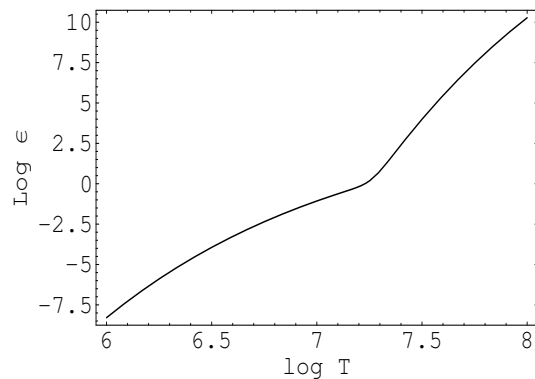
$$\epsilon_{CNO} = 8.67 \cdot 10^{27} g_{14,1} \rho X_1 X_{CNO} T_6^{-2/3} e^{-152.28/T_6^{1/3}}; \quad T_6 = \frac{T}{10^6} K \quad (39)$$

$$g_{14,1} = 1 + 0.0027 T_6^{1/3} + 0.00778 T_6^{2/3} + 0.000149 T_6 \quad (40)$$

Kot vidimo iz grafa (3) je hitrost jedrskih reakcij zelo odvisna od temperature. Pri nižji temperaturi prevladuje pp-cikel, pri višji pa NCO-cikel. Pri NCO-ciklu hitrost jedrskih reakcij narašča hitreje kot pri pp-ciklu, zato pri višji temperaturi prevlada NCO-cikel.

Sedaj, ko poznamo enačbe za proizvodnjo energije, lahko določimo izsev zvezde z integriranjem enačbe (19), če poznamo temperaturni in gostotni profil po zvezdi.

Temperaturni in gostotni profil določimo s pomočjo rešitev, ki smo jih dobili v poglavjih (2,3 in 4). Tu si izberemo maso zvezde in centralno temperaturo. S pomočjo enačb

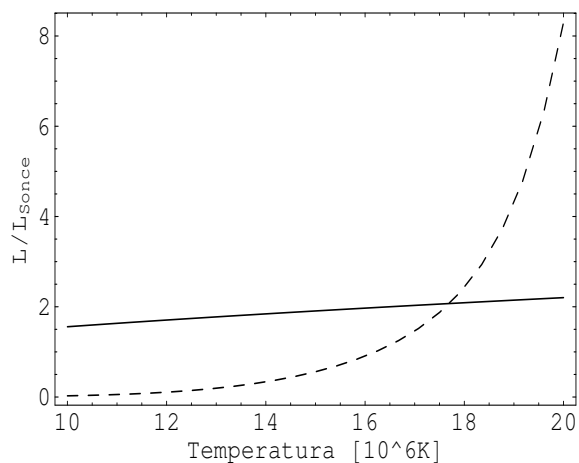


Slika 3: Hitrost jedrskih reakcij v odvisnosti od temperature. Položnejši del krivulje ustreza pp-ciklu, strmejši pa NCO-ciklu. $\rho = 1g/cm^3$, $X_1 = 1$, $X_{CNO} = 0.01$

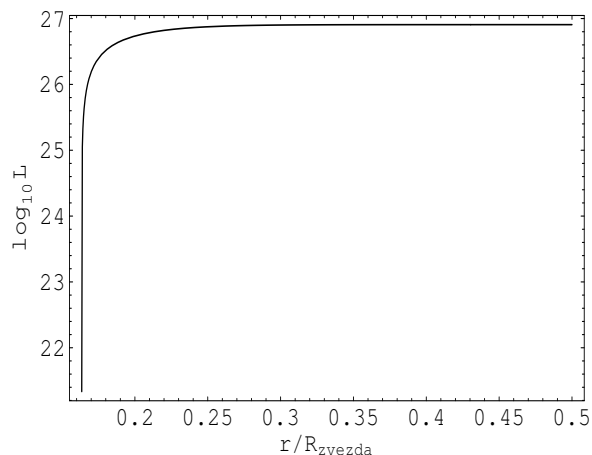
(21) dobimo izsev zvezde. Ko imamo temperaturni profil in profil gostote lahko potem izračunamo po enačbi (19) izsev, ki ga dasta $T(\xi)$ in $\rho(\xi)$.

Ugotovimo, da se izseva razlikujeta, vendar pa lahko temperaturo jedra nastavimo tako, da sta enaka. To se lepo vidi tudi iz grafa (4). Torej, s tem smo uspeli ugotoviti centralno temperaturo pri določeni masi zvezde.

Postopek računanja centralne temperature opisan zgoraj, je upravičen, če se večina energije proizvede na robu jedra. Izkaže se, da je res tako. To potrjuje tudi slika (5).



Slika 4: Izsev zvezde v odvisnosti od temperature jedra zvezde, ki ga dobimo s pomočjo enačb (21) (polna črta). Izsev, ki ga dobimo z integriranjem enačbe (19) pri poznanem $T(\xi)$ in $\rho(\xi)$



Slika 5: Izsev zvezde v odvisnosti od radija. Večja kot je strmina črte, več energije se proizvede v tistem delu zvezde.

6 Primer:

Kot smo opisali zgoraj, imamo samo še en prost parameter M (maso celotne zvezde). Sedaj se lahko lotimo primera z naslednjimi konstantami:

$$a = 1$$

$$b = 3.5$$

$$M = 2 * 10^{30} kg$$

Predpostavimo temperaturo jedra $T_{jedro} = 20 \cdot 10^6 K$. Nato s pomočjo enačb (21) in (27) dobimo:

$$R = 6.91 \cdot 10^8 m = 0.99 R_{\odot}$$

$$L = 8.6 \cdot 10^{26} W = 2.2 L_{\odot}$$

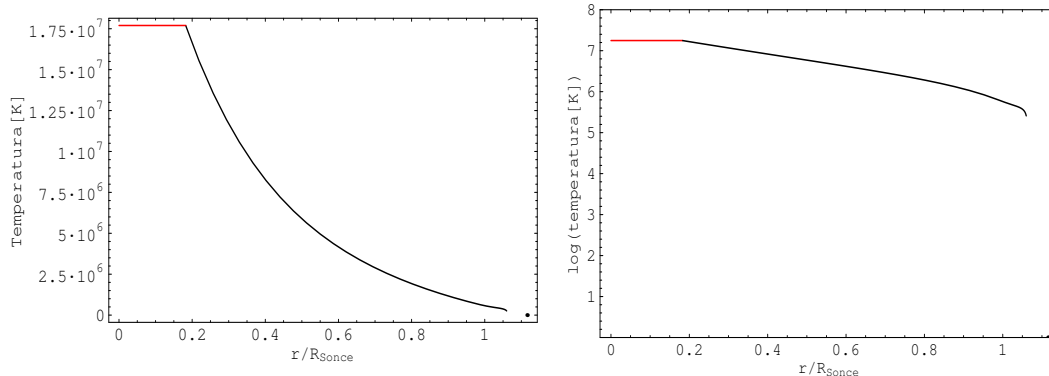
$$\rho_c = 350000 \frac{kg}{m^3}$$

in s pomočjo dobljenih rezultatov izračunamo $T(\xi)$ in $\rho(\xi)$. Potem izračunamo izsev ($L = 3.2 \cdot 10^{27} W$), ki ga dasta izračunana profila in ga primerjamo s prej izračunanim. Vidimo, da je drugi izsev večji od prvega, torej moramo temperaturo jedra zmanjšati. Izkazuje se, da je prava temperatura jedra enaka:

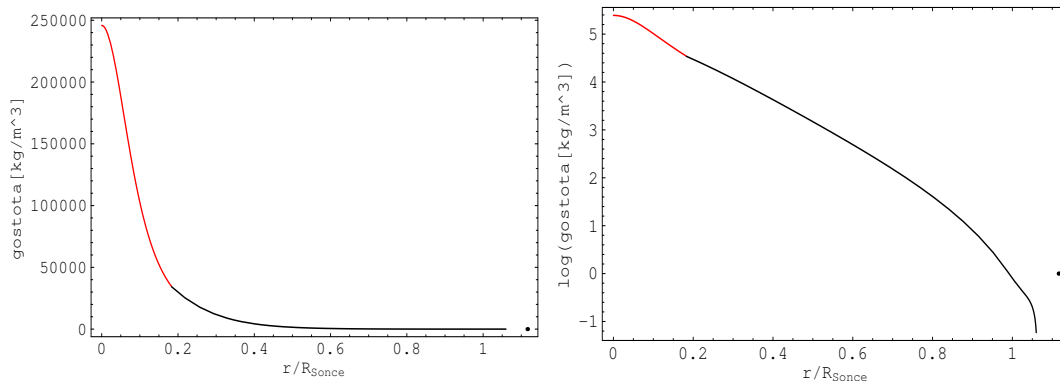
$$T_{jedro} = 17.7 \cdot 10^6 K$$

Za pravi izsev pa dobimo:

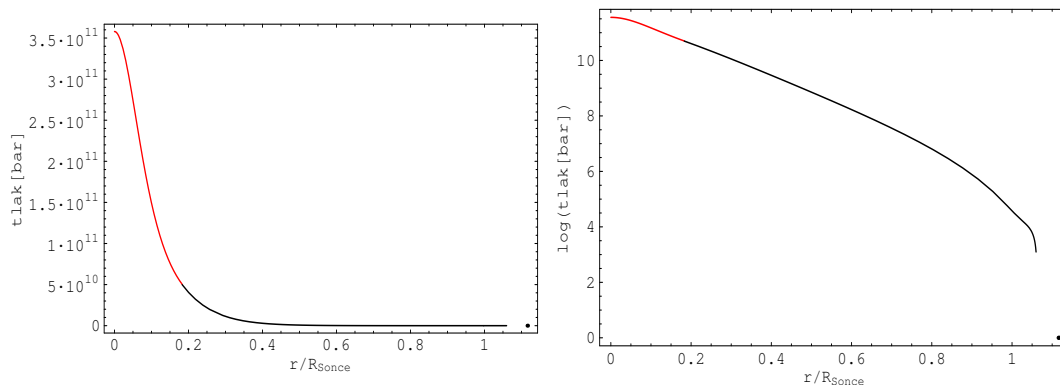
$$L = 8.08 \cdot 10^{26} W = 2.07 L_{\odot}$$



Slika 6: Spreminjanje temperature v zvezdi v odvisnosti od radija. Z rdečo črto je označeno jedro, s črno pa ovojnica. Desno je graf v logaritmski skali. S piko je označen rob zvezde



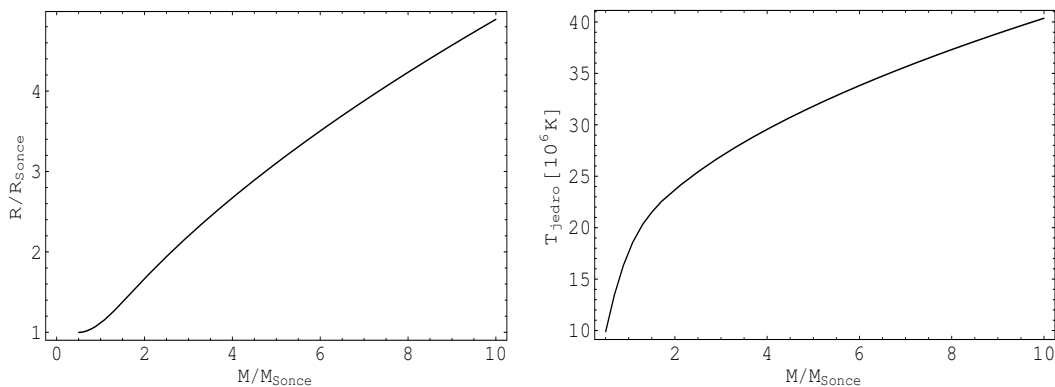
Slika 7: Spreminjanje gostote v zvezdi v odvisnosti od radija. Z rdečo črto je označeno jedro, s črno pa ovojnica. Desno je graf v logaritmski skali. S piko je označen rob zvezde



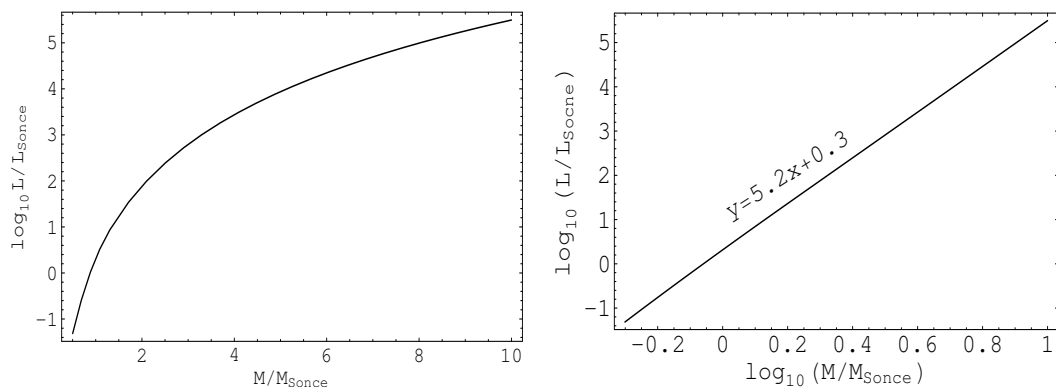
Slika 8: Spreminjanje tlaka v zvezdi v odvisnosti od radija. Z rdečo črto je označeno jedro, s črno pa ovojnica. Desno je graf v logaritmski skali. S piko je označen rob zvezde

Sedaj, ko imamo ustrezno temperaturo jedra in s tem izsev lahko narišemo ustrezne profile temperature (slika 6), gostote (slika 7) in tlaka (slika 8) v odvisnosti od lege v zvezdi normirano na radij Sonca. Za maso zvezde smo vzeli $M = M_{\odot}$.

Zanimivo si je tudi ogledati, kako se centralna temperatura, radij, izsev in centralna gostota spreminjajo v odvisnosti od mase zvezde.



Slika 9: Polmer zvezde v odvisnosti od njene mase (levo), temperatura jedra v odvisnosti od mase (desno)

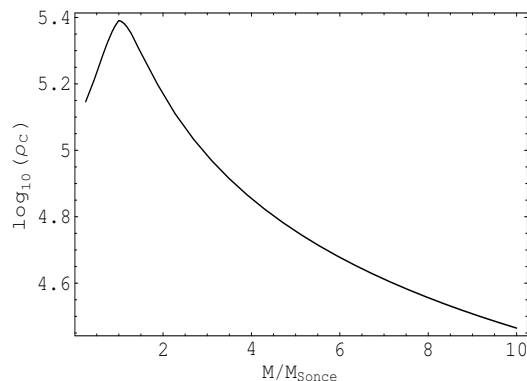


Slika 10: Izsev zvezde v odvisnosti od njene mase (levo), log-log graf izseva v odvisnosti od mase (desno)

Kot vidimo iz slike (10) je graf izseva v odvisnosti od mase v log-log skali kar premica. Iz tega lahko zapišemo tudi odvisnost izseva od mase z enačbo:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 10^{0.3} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{5.2} \quad (41)$$

Zgornja enačba velja le za zvezdo, ki ima izotermno jedro v katerem je helij, ki ne gori in je v njem približno 30.7% celotne mase zvezde ter sevalno ovojnico, v kateri potekajo jedrske reakcije.



Slika 11: Gostota v središču zvezde v odvisnosti od njene mase

Graf prikazan na sliki (11) ima prav zanimivo obnašanje. Z večanjem mase zvezde se centralna gostota zmanjšuje, kar tudi pričakujemo. Pri masi manjši od mase sonca, pa pride do tega, da se začne centralna gostota manjšati. To nam mogoče pove to, da zvezde, z zgoraj opisano strukturo, z manjšo maso od M_{\odot} ne obstajajo, ker postanejo nestabilne nestabilne.

7 Zaključek

Model zvezde, ki smo ga opisali zgoraj, opiše le del življenja zvezde. Kljub temu se lahko veliko naučimo. Naprimer: Zvezde s kakšno maso lahko pridejo v tak stadij v svojem razvoju, kakšen izsev imajo, kolikšen polmer itd.

Pri numeričnem reševanju je bilo marsikje potrebno narediti kakšen približek, da je rešitev sploh obstajala, ker ima računalnik končno število decimalk. Težave smo imeli predvsem pri robnih pogojih, če je bil robni pogoj enak 0 in je kasneje prišlo do deljenja s tem številom.

Literatura

- [1] R.Kippenhahn A.Weigert: *Stellar Structure and Evolution*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1990
- [2] Richard Bowers, Terry Deeming: *Astrophysics 1 STARS*, London 1984