Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

Elektromagnetno polje okoli Kerr-Newmanove črne luknje

Teorija Gravitacije

Projekt

Študentka: Julija Zavadlav

Ljubljana, Oktober 2010

Naloga

Iz elektromagnetne 2-forme za Kerr-Newmannovo črno luknjo izračunaj komponente električnega in magnetnega polja v veliki oddaljenosti. Od tod izračunaj naboj, magnetni dipolni moment in giromagnetno razmerje.

Uvod

Leta 1965 je Ezra Newman zapisal Kerr-Newmanovo metriko oz. rešitev Einstein-Maxwellovih enačb v splošni teoriji relativnosti. Kerr-Newmanova metrika opisuje geometrijo prostora-časa zunaj nabite, rotirajoče mase njeno povezavo s črno luknjo pa sta odkrila Shapiro in Teukolsky leta 1983.

Einsteinove enačbe polja

Einsteinove enačbe polja so množica desetih enačb v Einsteinovi splošni teoriji relativnosti s katerimi je opisana osnovna sila e kot ukrivljenost prostor-časa, ki jo povzročata snov in energija. Enačbe je Einstein prvič objavil leta 1915 in se zaradi tega imenujejo tudi Einsteinove enačbe ali kar Einsteinova enačba.

Oddaljenost med dvema diferencialno bližjima dogodkoma v 4-dimenzionalnem prostoru-času zapišemo kot:

$$d s^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{1}$$

V enačbi (1) je $g_{\mu\nu}$ je metrični tenzor~~, ki opisuje koordinatni sistem in ukrivljenost prostora~~. Ker je metrični tenzor simetričen ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$), ima največ 10 različnih komponent. Metriko prostora označimo z ds in je neodvisna od izbire koordinat. ?

Zapišimo enačbe polja v osnovni obliki:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2}$$

kjer je $G_{\mu\nu}$ Einsteinov tenzor, $T_{\mu\nu}$ napetostni tenzor, G gravitacijska konstanta, c pa svetlobna hitrost. Od tu naprej bomo pisali enačbe v enotah G = c = 1. Enačbe so tenzorske. Enačijo ukrivljenost prostor-časa, izraženo prek Einsteinovega tenzorja, z energijo in gibalno količino, ki ju določa napetostni tenzor. Einsteinov tenzor lahko zapišemo tudi drugače:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{3}$$

Tu je $R_{\mu\nu}$ Riccijev tenzor ukrivljenosti, $g_{\mu\nu}$ metrični tenzor, R pa Riccijev skalar. Zaradi povezave med metričnim tenzorjem in Einsteinovim tenzorjem so enačbe sklopljene, nelinearne diferencialne enačbe.

Riccijev tenzor $R_{\mu\nu}$ in Riccijev skalar R dobimo iz *Riemannovega tenzorja* $R^\sigma{}_{\rho\mu\nu}$, ta pa je definiran preko Christoffelovih simbolov $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$.

$$R^\sigma_{\rho\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\sigma_{\alpha\mu}\Gamma^\alpha_{\rho\nu} - \Gamma^\sigma_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\rho\mu} \tag{4}$$

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu} \quad (5)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (6)$$

Christoffelovi simboli so povezani z odvodi metričnega tenzorja:

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} \left[\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right] \quad (7)$$

V naši nalogi se bomo ukvarjali z elektromagnetnim poljem v okolici črne luknje. V tem primeru lahko napetostni tenzor elektromagnetnega polja zapišemo z enačbo (8).

$$T_{\mu\nu} = \tfrac{1}{4\pi} (F^{\alpha}_{\mu} F_{\nu\alpha} - \tfrac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \quad (8)$$

V tem zapisu je $F_{\mu\nu}$ kovariantni tenzor (Maxwellov tenzor) elektromagnetnega polja, ki ga lahko zapišemo v matriki kot:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Minkowski je kovariantni tenzor elektromagnetnega polja povezal s štirirotorjem ustreznega štirivektorja elektromagnetnega potenciala A_μ z enačbo (10).

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \quad (10)$$

Einsteinove in Maxwellove enačbe lahko povežemo ter tako dobimo enačbe, ki jim pravimo Einstein-Maxwellove enačbe (11).

$$G_{\mu\nu} = 2(F^{\alpha}_{\mu} F_{\nu\alpha} - \tfrac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \quad (11)$$

Enačbe so zapletene in celo Einstein ni verjel, da se bo kdaj našla kakšna analitična rešitev teh enačb. Vendar je prvo rešitev našel Schwarmzschild le leto dni po Einsteinovi objavi. Ta rešitev je zunanja metrika za statično sferno simetrično maso. Drugo rešitev, za vrtečo se maso (aksialna simetrija), je šele 47 let kasneje našel Kerr. Analitična rešitev za enkrat obstaja še za nabito mirujočo in nabito vrtečo se maso (Kerr-Newmanova) rešitev.

Kerr-Newmanova metrika

Kerr-Newmanova metrika nabitega rotirajočega telesa v zunanjem praznem prostoru je podana z enačbo (12).

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho}\right) dt^2 - \frac{(2Mr - Q^2) 2a \sin^2\theta}{\rho} dt d\phi \quad (12)$$

$$+ \frac{\rho}{\Delta} dr^2 + \rho d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{(2Mr - Q^2) a \sin^2\theta}{\rho}\right) \sin^2\theta d\phi^2$$

$\rho = r^2 + a^2 cos^2\theta$

$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$

Zaradi lažjega zapisa smo v enačbi (12) uporabili novi spremenljivki ρ in Δ. Metriko smo zapisali v običajnih Boyer-Lindquistovih koordinatah (t,r, θ,φ), ki so povezane s kartezičnimi koordinatami z enačbami (13).

$$\begin{aligned} t &= t \\ x &= \sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\cos\phi \\ y &= \sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{13}$$

Kerr-Newmanova rešitev predstavlja črno luknjo, če velja $G^2m^2 > GQ^2 + a^2$. Brez lasni teorem (No-hair theorem) pravi, da so vse rešitve Einstein-Maxwellovih enačb popolnoma določene s tremi klasičnimi prametri: maso, električnim nabojem in specifično vrtilno količino. Kot bomo videli v nadaljevanju, so ti parametri v Kerr-Newmanovi metriki predstavljeni z oznakami M, Q in a.

Elektromagnetno polje okoli Kerr-Newmanove črne luknje

Potencial zunanjega elektromagnetnega polja A_μ Kerr-Newmanove rešitve je podan kot:

$$A = \frac{1}{\rho}(-Qr, 0, 0, Qrb\sin^2\theta)\,. \tag{14}$$

Iz enačbe (10) in (14) izračunamo ne-ničelne komponente tenzorja elektromagnetnega polja.

$$\begin{aligned} F_{tr} &= \frac{Q^2(r^2-a^2\cos^2\theta)}{\rho^2} \\ F_{t\theta} &= -\frac{2Qra^2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2} \\ F_{r\phi} &= \frac{Qa\sin^2\theta}{\rho^3}(r^2-a^2\cos^2\theta) \\ F_{\theta\phi} &= -\frac{2Qra\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}(r^2+a^2) \end{aligned} \tag{15}$$

Preverimo, da to elektromagnetno polje Kerr-Newmanove črne luknje res reši Einstein-Maxwellove enačbe. Najprej si poglejmo desno stran enačbe (11). Za izračun komponent napetostnega tenzorja bomo potrebovali tenzorja $F_\mu^{\ \nu}$ in $F^{\mu\nu}$, ki jih dobimo s pomočjo relacij (16).

$$\begin{aligned} F_\mu^\nu &= g^{\nu\alpha}F_{\mu\alpha} \\ F^{\mu\nu} &= g^{\mu\alpha}F_\alpha^\nu \end{aligned} \tag{16}$$

S pomočjo programa Mathematica in enačbe (8) dobimo sledeče ne-ničelne komponente napetostnega tenzorja:

$$T_{tt} = \frac{Q^2(\Delta + a^2\sin^2\theta)}{8\pi\rho^3}$$

$$T_{t\phi} = -\frac{Q^2 a \sin^2\theta}{8\pi\rho^3}(\Delta + a^2 + r^2) \tag{17}$$
$$T_{rr} = -\frac{Q^2}{8\pi\rho\Delta}$$
$$T_{\theta\theta} = \frac{Q^2}{8\pi\rho}$$
$$T_{\phi\phi} = -\frac{Q^2 \sin^2\theta}{8\pi\rho^3}(\Delta a^2 \sin^2\theta + (r^2 + a^2)^2)\,.$$

Levo stran Einstein-Maxwellovih enačb t.i. Einsteinov tenzor $G_{\mu\nu}$ izračunamo iz enačb (3) - (7). Ker je Riccijev skalar R=0, je Einsteinov tenzor kar enak Riccijevem tenzorju. Ne-ničelne komponente Einsteinovega tenzorja so sledeče:

$$G_{tt} = \frac{Q^2(\Delta + a^2 \sin^2\theta)}{\rho^3}$$
$$G_{t\phi} = -\frac{Q^2 a \sin^2\theta}{\rho^3}(\Delta + a^2 + r^2) \tag{18}$$
$$G_{rr} = -\frac{Q^2}{\rho\Delta}$$
$$G_{\theta\theta} = \frac{Q^2}{\rho}\text{nz}$$
$$G_{\phi\phi} = -\frac{Q^2 \sin^2\theta}{\rho^3}(\Delta a^2 \sin^2\theta + (r^2 + a^2)^2)\,.$$

Kot vidimo se komponente napetostnega tenzorja (17) ter komponente Einsteinovega tenzorja (18) razlikujejo ravno za koeficient 8π, ki nastopa v Einsteinovih enačbah polja.

Masa, vrtilna količina, naboj, dipolni moment in giromagnetno razmerje

Preverimo, da konstante M, Q in a, ki se pojavijo v Kerr-Newmanovi metriki, res predstavljajo maso, naboj in vrtilno količino na enoto mase črne luknje.

1. Masa in vrtilna količina

Masa in vrtilna količina sta definirani preko posledice geometrije prostora-časa daleč stran od črne luknje. Naredimo razvoj matrike po koeficientih r, ko gre r →∞, ter poglejmo vodilne člene.

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r} + O\left(\frac{1}{r}\right)^2\right]dt^2 - \left[\frac{4aM}{r}\sin^2\theta + O\left(\frac{1}{r}\right)^2\right]dt\,d\phi$$
$$+\left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right](dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)) \tag{19}$$

Enačbo (19) pretvorimo v asimptotične Lorentzove koordinate x= rsinθcosϕ, y=rsinθsinϕ in z=cosθ:

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r} + O\left(\frac{1}{r}\right)^2\right]dt^2 - \left[\frac{4aM}{r^3} + O\left(\frac{1}{r}\right)^4\right](xdy - ydx) + \left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right](dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (20)$$

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2} + O\left(\frac{1}{r}\right)^3\right]dt^2 - \left[4\varepsilon_{jkl}\Gamma^k \frac{x^l}{r^3} + O\left(\frac{1}{r}\right)^3\right]dtdx^j + \left[1 + \frac{2M}{r} + \frac{3M^2}{2r^2}\right]\delta_{jk}dx^j dx^k \quad (21)$$

Primerjava enačbe (20) s standardno obliko metrike daleč stran od stacionarnega rotirajočega objekta (21) nam pove, da je parameter M res masa črne luknje, medtem ko parameter a predstavlja vrtilno količino na enoto mase.[1]

2. Naboj

Da bi našli električno polje v veliki oddaljenosti od črne luknje, kjer je prostor-čas skoraj raven, naredimo multipolni razvoj električnega polja v običajnih sferičnih koordinatah do reda velikosti 1/r^6.

$$E_{\hat{r}} = E_r = F_{tr} = \frac{Q}{r^2} - \frac{3Qa^2\cos^2\theta}{r^3} + O\left[\frac{1}{r}\right]^6$$
$$E_{\hat{\theta}} = \frac{E_\theta}{r} = \frac{F_{t\theta}}{r} = -\frac{2Qa^2\cos\theta\sin\theta}{r^4} + O\left[\frac{1}{r}\right]^6 \quad (22)$$
$$E_{\hat{\phi}} = \frac{E_\phi}{r\sin\theta} = \frac{F_{t\phi}}{r\sin\theta} = 0$$

Naboj je definiran preko Gaussovega zakona, ki pravi, da je električni pretok skozi zaključeno ploskev enak objetemu naboju.

$$\Phi_e = \varepsilon_0 \oint \vec{E}d\vec{S} = e \quad (23)$$

V približku velike oddaljenosti od črne luknje lahko vzamemo, da je električno polje samo radialno ter tako vidimo, da Q predstavlja naboj črne luknje.

$$\oint E_{\hat{r}}dS = \oint \frac{Q}{r^2}dS = 4\pi Q \quad (24)$$

3. Magnetni dipolni moment in giromagnetno razmerje

Podobno kot za električno polje naredimo razvoj za velike oddaljenosti od črne luknje tudi za magnetno polje.

$$B_{\hat{r}} = F_{\hat{\theta}\hat{\phi}} = \frac{F_{\theta\phi}}{r^2\sin\theta} = \frac{2Qa\cos\theta}{r^3} - \frac{Qa^3\sin 4\theta}{2r^5\sin\theta} + O\left[\frac{1}{r}\right]^7$$
$$B_{\hat{\theta}} = F_{\hat{\phi}\hat{r}} = \frac{F_{\phi r}}{r\sin\theta} = \frac{Qa\sin\theta}{r^3} - \frac{3Qa^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^5} + O\left[\frac{1}{r}\right]^7 \quad (25)$$
$$B_{\hat{\phi}} = F_{\hat{r}\hat{\theta}} = \frac{F_{r\theta}}{r} = 0$$

V prvem približku lahko zapišemo magnetno polje kot

$$\vec{B} = \frac{Qa}{r^3}(2\cos\theta, \sin\theta, 0)\,. \tag{26}$$

Vidimo, da je v približku velike oddaljenosti magnetno polje enako dipolnemu magnetnemu polju podanem z enačbo (27)

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{p}_m\hat{r})\hat{r} - \vec{p}_m}{r^3} = \frac{p_m}{r^3}(2\cos\theta, \sin\theta, 0)\,, \tag{27}$$

kjer je magnetni dipolni moment enak

$$p_m = Qa = 2\left(\frac{Q\Gamma}{2M}\right). \tag{26}$$

Upoštevali smo, da je parameter a vrtilna količina na enoto mase. Iz enačbe (26) lahko preberemo giromagnetno razmerje, ki je definirano kot razmerje med dipolnim magnetnim momentom in vrtilno količino. Klasično je giromagnetno razmerje za nabit rotirajoč točkast delec enako Q/2m. Kerr-Newmanova črna luknja ima torej giromagnetno razmerje enako 2 oz. spin ½, tako kot elektron v Diracovi teoriji.

Literatura

1. Charles W. Misner: Gravitation, Freeman and company, San Francisco, 1973
2. Čadež: Skripta za teorijo gravitacije