Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za fiziko

Zaključna naloga iz Astrofizike

Ana Hočevar

17. maj 2007

1 Naloga

Poišči nekaj lastnih frekvenc politropnih zvezd za nihajne načine, ki jih opišemo z odmikom $\delta\vec{r} = \nabla(f(r)Y_{lm}(\theta,\phi))\exp^{i\omega t}$.

2 Izpeljava enačb nihanja

Naravno je, da pri tovrstni obravnavi izberemo sferične koordinate r, θ, ϕ. Zvezda v ravnovesnem stanju je sferno simetrična, količine, ki se nanašajo na ravnovesno stanje pa označimo z indeksom 0 ($p_0, \Phi_0, \ldots$).
Začnemo z enačbo gibanja (2. Newtonov zakon):

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\nabla p - \rho\nabla\Phi \tag{1}$$

Oziroma:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi \tag{2}$$

Na tem mestu upoštevamo, da imamo opravka s politropno zvezdo, torej velja:

$$p = K\rho^\gamma \tag{3}$$

S pomočjo tega zapišimo:

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho}K\gamma\rho^{\gamma-1}\nabla\rho = \frac{K\gamma}{\gamma-1}\nabla\rho^{\gamma-1} \tag{4}$$

Potem se enačba gibanja glasi:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\nabla(\frac{K\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} + \Phi) \tag{5}$$

V ravnovesju, ko zvezda miruje, torej $\vec{v} = 0$, velja enakost:

$$\nabla(\frac{K\gamma}{\gamma-1}\rho_0^{\gamma-1} + \Phi_0) = 0 \tag{6}$$

Iz česar sledi:

$$\frac{K\gamma}{\gamma-1}\rho_0^{\gamma-1}+\Phi_0=const \tag{7}$$

$$\Phi_0=const-\frac{K\gamma}{\gamma-1}\rho_0^{\gamma-1} \tag{8}$$

Tako je torej v ravnovesju. Ko pa dodamo motnjo, lahko zapišemo zmotene količine:

$$\rho=\rho_0+\delta\rho \tag{9}$$

$$\Phi=\Phi_0+\Phi' \tag{10}$$

Če to sedaj vstavimo v enačbo 5 in upoštevamo enakost v ravnovesju, ostane:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-\nabla\left(\frac{K\gamma}{\gamma-1}\rho_0^{\gamma-1}\left(1+\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}+\Phi_0+\Phi'\right) \tag{11}$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-\nabla\left(\frac{K\gamma}{\gamma-1}\rho_0^{\gamma-1}(\gamma-1)\frac{\delta\rho}{\rho}+\Phi'\right) \tag{12}$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-\nabla(K\gamma\rho_0^{\gamma-2}\delta\rho+\Phi') \tag{13}$$

Poglejmo še kakšna je Laplaceova enačba. Vemo, da v ravnovesju velja:

$$\nabla^2\Phi_0=4\pi G\rho_0 \tag{14}$$

Torej, ko ravnovesje zmotimo, dobimo:

$$\nabla^2\Phi'=4\pi G\delta\rho \tag{15}$$

Upoštevati je potrebno tudi kontinuitetno enačbo:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla(\rho\vec{v})=0 \tag{16}$$

Vstavimo $\rho=\rho_0+\delta\rho$ in upoštevamo le prvi red, pa dobimo:

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\nabla\rho_0=0 \tag{17}$$

Zapišmo sedaj na enem mestu vse enačbe, ki narekujejo gibanje:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-\nabla(K\gamma\rho_0^{\gamma-2}\delta\rho+\Phi') \tag{18}$$

$$\nabla^2\Phi'=4\pi G\delta\rho \tag{19}$$

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\nabla\rho_0=0 \tag{20}$$

Sedaj pa vpeljemo nastavke za odmike od ravnovesja, in sicer takole:

$$\vec{r}=\nabla(f(r)Y_{lm}(\theta,\phi))\exp^{i\omega t} \tag{21}$$

$$\vec{v}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}=i\omega\nabla(f(r)Y_{lm}(\theta,\phi))\exp^{i\omega t} \tag{22}$$

$$\Phi'=g(r)Y_{lm}(\theta,\phi)\exp^{i\omega t} \tag{23}$$

$$\delta\rho=h(r)Y_{lm}(\theta,\phi)\exp^{i\omega t} \tag{24}$$

To sedaj vstavimo v enačbe, ki smo jih izpeljali prej. Najprej v enačbo 18:

$$i\omega\nabla(i\omega f(r)Y_{lm}\exp^{i\omega t}) = -\nabla(K\gamma\rho_0^{\gamma-2}h(r)Y_{lm} + g(r)Y_{lm})\exp^{i\omega t} \tag{25}$$

$$-\omega^2 f(r) + K\gamma\rho_0^{\gamma-2}h(r) + g(r) = 0 \tag{26}$$

Vstavimo nastavke tudi v 19:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\Phi'}{dr}) - \frac{l(l+1)}{r^2}\Phi' = 4\pi G\delta\rho \tag{27}$$

$$\frac{2}{r}\frac{dg(r)}{dr} + \frac{d^2g(r)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}g(r) = 4\pi G h(r) \tag{28}$$

Preden vstavimo še v 20, razčistimo kaj je $\vec{v}\cdot\nabla\rho_0$:

$$\vec{v}\cdot\nabla\rho_0 = \vec{v}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial\rho_0}{\partial r} \tag{29}$$

$$= v_r\frac{\partial\rho_0}{\partial r} = i\omega Y_{lm}\exp^{i\omega t}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial\rho_0}{\partial r} \tag{30}$$

Torej lahko zapišemo:

$$i\omega h(r)Y_{lm}\exp^{i\omega t} + \rho_0\nabla^2(i\omega f(r)Y_{lm}\exp^{i\omega t}) + i\omega Y_{lm}\exp^{i\omega t}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial\rho_0}{\partial r} = 0 \tag{31}$$

$$h(r) + \rho_0(\frac{2}{r}\frac{df(r)}{dr} + \frac{d^2f(r)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}f(r)) + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial\rho_0}{\partial r} = 0 \tag{32}$$

Dobili smo tri enačbe za tri funkcije $f(r), g(r), h(r)$. Izkaže se, da lahko iz enačbe 28 izrazimo $h(r)$ in s tem tri enačbe pretvorimo v dve:

$$h(r) = \frac{1}{4\pi G}(\frac{2}{r}\frac{dg(r)}{dr} + \frac{d^2g(r)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}g(r)) \tag{33}$$

To vstavimo v enačbi 26 in 32 in dobimo:

$$-\omega^2 f(r) + \frac{K\gamma\rho_0^{\gamma-2}}{4\pi G}(\frac{2}{r}\frac{dg(r)}{dr} + \frac{d^2g(r)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}g(r)) + g(r) = 0 \tag{34}$$

$$\frac{1}{4\pi G}(\frac{2}{r}\frac{dg(r)}{dr} + \frac{d^2g(r)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}g(r)) + \rho_0(\frac{2}{r}\frac{df(r)}{dr} + \frac{d^2f(r)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}f(r)) + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial\rho_0}{\partial r} = 0 \tag{35}$$

To sta naši dve enačbi, ki ju rešujemo. Potrebujemo le še robne pogoje.
V središču zvezde moramo imeti regularne perturbacije, zato je :

$$\Phi'(r=0) = 0 \rightarrow g(r=0) = 0 \tag{36}$$

Prav tako zahtevamo odmik v središču enak nič:

$$\vec{r}(r=0) = 0 \rightarrow \frac{df}{dr}(r=0) = 0 \tag{37}$$

Na površju zvezde, kjer je radij $r = R_0$ pa dobimo pogoj [1]:

$$\gamma R_0\frac{df}{dr}(r=R_0) - (4-\gamma 3)f(r=R_0) = 0 \tag{38}$$

Prav tako zahtevamo na površju zveznost Lagrangeve variacije $\nabla\Phi$ [1]:

$$(\frac{\partial\Phi'}{\partial r} + \vec{r}\cdot\nabla\Phi_0)_{znotraj} = (\frac{\partial\Phi'}{\partial r} + \vec{r}\cdot\nabla\Phi_0)_{zunaj} \tag{39}$$

Sedaj imamo enačbe in robne pogoje. Preden gremo k reševanju, pretvorim enačbe v brezdimenzijsko obliko.

3 Enačbe v brezdimenzijski obliki

Količine zapišemo v brezdimenzijski obliki, in sicer za gostoto:

$$\rho_0 = \rho_c \Theta^n \tag{40}$$

Uvedemo tudi:

$$\xi = Ar, \tag{41}$$

kjer je:

$$A^2 = \frac{4\pi G \rho_c^{1-\frac{1}{n}}}{K(n+1)} \tag{42}$$

Enačbi, ki ju bomo reševali, se potem prepišeta v:

$$-\Omega^2 f(\xi) + \frac{1}{n}\Theta^{1-n}(\xi)(\frac{2}{\xi}\frac{dg(\xi)}{d\xi} + \frac{d^2g(\xi)}{d\xi^2} - \frac{l(l+1)}{\xi^2}g(\xi)) + g(\xi) = 0 \tag{43}$$

$$\frac{1}{n}(\frac{2}{\xi}\frac{dg(\xi)}{d\xi}+\frac{d^2g(\xi)}{d\xi^2}-\frac{l(l+1)}{\xi^2}g(\xi))+\Theta^n(\xi)(\frac{2}{\xi}\frac{df(\xi)}{d\xi}+\frac{d^2f(\xi)}{d\xi^2}-\frac{l(l+1)}{\xi^2}f(\xi))+n\Theta^{n-1}\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 0 \tag{44}$$

Pri tem je:

$$\Omega^2 = \frac{n}{4\pi G\rho_c}\omega^2 \tag{45}$$

Robni pogoji pa se glasijo:

$$g(\xi = 0) = 0 \tag{46}$$

$$\frac{df}{d\xi}(\xi = 0) = 0 \tag{47}$$

$$\gamma A R_0 \frac{df}{d\xi}(\xi = AR_0) - (4-\gamma 3) f(\xi = AR_0) = 0 \tag{48}$$

$$(\frac{\partial g}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi})_{znotraj} = (\frac{\partial g}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi})_{zunaj} \tag{49}$$

oziroma:

$$(\frac{\partial g}{\partial \xi} + K(1+n)\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \Theta}{\partial \xi})_{znotraj} = (\frac{\partial g}{\partial \xi} + K(1+n)\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \Theta}{\partial \xi})_{zunaj} \tag{50}$$

Sedaj imamo enačbe in robne pogoje v brezdimenzijski obliki in lahko gremo k reševanju. Da bomo lahko enačbe rešili, potrebujemo poznati funkcijo Θ.

4 Reševanje Lane-Emdenove enačbe

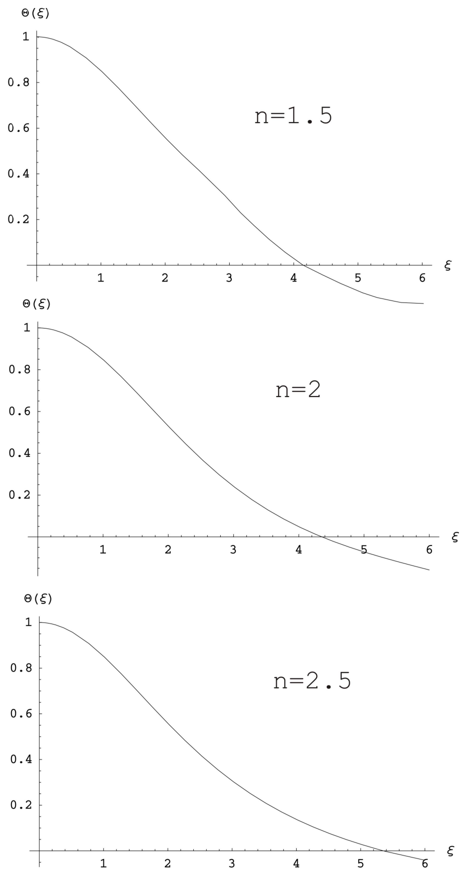
Funkcijo gostote ρ_0 v ravnovesju smo v brezdimenzijski obliki zapisali kot $\rho_0 = \rho_c\Theta^n$. Da bomo enačbe nihanja, ki smo jih izpeljali lahko rešili, moramo poznati funkcijo $\Theta(\xi)$. Dobimo jo z reševanjem Lane-Emdenove enačbe. Prav tako bomo nato določili še rob zvezde, ki je pri tistem ξ, kjer velja $\Theta(\xi) = 0$.
Lotimo se reševanja Lane-Emdenove enačbe, ki se glasi:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}(\xi^2\frac{d\Theta}{d\xi}) = -\Theta^n \tag{51}$$

Enačbo je potrebno reševati numerično, razen za vrednosti politropnega indeksa $n = 0, 1, 5$. Numerično rešimo tako, da najprej funkcijo Θ razvijemo okrog $\xi = 0$. Začetna pogoja poznamo, $\Theta(0) = 1$ in $\Theta'(0) = 0$, za preostale odvode pa si pomagamo z Lane-Emdenovo enačbo. Tako lahko zapišemo:

$$\Theta(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6} + \frac{n\xi^4}{120} + \frac{(5n - 8n^2)\xi^6}{15120 + \ldots} \tag{52}$$

Ta razvoj namreč potrebujemo, ker je Lane-Emdenova enačba v $\xi = 0$ singularna. Zato začnemo z numeričnim integriranjem v točki, ki je zelo bilzu nič. S pomočjo zgornjega razvoja okrog $\xi = 0$ pa izračunamo začetne pogoje v tej točki blizu nič. Potem lahko s pomočjo na primer Mathematice rešimo ta sistem in dobimo rešitev za $\Theta(\xi)$. Potrebujemo pa poiskati tudi ničle funkcij $\Theta(\xi)$ pri izbranem n, saj nam le-te povejo brezdimenzijski radij zvezde. Ničle prav tako lahko poiščemo z Mathematico.



Slika 1: Rešitve Lane-Emdenove enačbe za različne vrednosti n.

n	1.5	2	2.5
ξ_0	3.65375	4.35287	5.35527

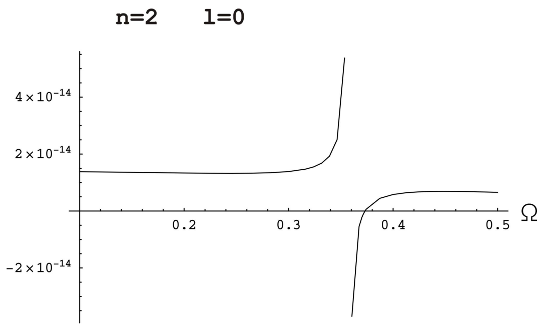
Tabela, ki kaže vrednosti brezdimenzijskega radija zvezde zaražlične vrednosti n.

5 Reševanje enačb nihanja

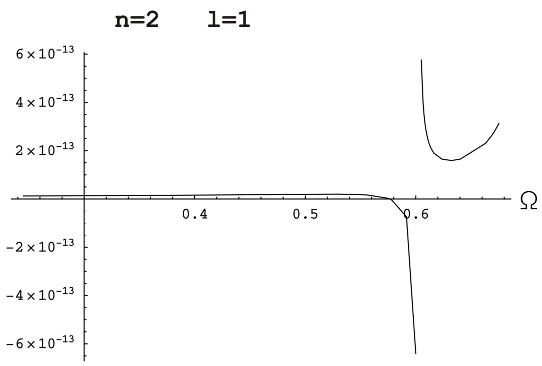
Sedaj smo opremljeni s potrebnim in lahko rešujemo enačbe, ki smo jih izpeljali na začetku. Numerično rešujemo podobno kot smo reševali Lane-Emdenovo ena čbo. Pri tem imamo robne pogoje, ki jih opisujejo enačbe 46, 47 in 48. Poleg teh si izberemo še $f(0)$, nato pa rešujemo naš sistem enačb za različne Ω. To počnemo dokler ne najdemo prave Ω, pri kateri je izpolnjen tudi pogoj 49. Izraz 49 zapišemo kot:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial g}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi}\right)(\xi=\xi_0)=0 \tag{53}$$

Slika 2 in 3 prikazujeta vrednost izraza 53 v odvisnosti od Ω pri $n=2$ za različna l. Tista vrednost Ω, pri kateri je ničla, ustreza lastni frekvenci.



Slika 2: Vrednost izraza 53 v odvisnosti od Ω pri $n=2$, $l=0$.



Slika 3: Vrednost izraza 53 v odvisnosti od Ω pri $n=2$, $l=1$.

Spodnja tabela pa kaže lastne frekvence za nekatere vrednosti n in l.

l	Ω pri $n=1.5$	Ω pri $n=2$	Ω pri $n=2.5$
0	0.49764	0.37309	0.22338
1	0.70905	0.57648	0.46615
2	1.18586	0.91038	0.71655

Literatura

[1] R. Kippenhahn, A. Weigert, *Stellar Structure and Evolution*, Springer-Verlag, 1990

[2] I. Kuščer, A. Kodre, *Matematika v fiziki in tehniki*, DMFA, 1994