Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za fiziko

Domača naloga pri Teoriji gravitacije

Sevanje gibajočega naboja in tokovne zanke

Štefan Krek

30. december 2008

Kazalo

1 Naloga

Skozi krožno zanko teče tok $I(t)$. Poišči rešitev za vektorski potencial daleč od zanke in izračunaj porazdelitev gostote energijskega toka, ki ga zanka seva v prostor. Podoben račun naredi za pozitiven in negativen naboj, ki krožita okrog skupnega težišča in primerjaj rešitvi.

2 Riemann-Sommerfeldova enačba

Riemman-Sommerfeldova enačba povezuje elektromagnetni potencial z gostoto toka

$$\Box^2 A^\mu = -\mu_0 j^\mu. \tag{1}$$

A^μ je četverec elektromagnetnega potenciala ter j^μ četverec gostote toka.

$$A^\mu = (-\frac{\varphi}{c}, \vec{A}), \qquad j^\mu = (-c\rho, \vec{j})$$

Četverec gostote toka za točkast delec opisuje enačba

$$j^\mu = e \int \dot{\xi}^\mu(\tau)\delta^4(x^\mu - \xi^\mu(\tau))d\tau, \tag{2}$$

kjer je $\xi^\mu(\tau)$ trajektorija točkastega delca.

2.1 Reševanje Riemman-Sommerfeldove enačbe

Riemman-Sommerfeldovo enačbo rešujemo s pomočjo Greenovih funkcij. Rešitev za četverec elektromagnetnega potenciala je

$$A^\mu = -\mu_0 \int G(x^\mu, \xi^\mu) j^\mu d^4\xi. \tag{3}$$

Zgornja rešitev velja, če velja

$$\Box G(x^\mu, \xi^\mu) = \delta^4(x^\mu - \xi^\mu(\tau)) \tag{4}$$

Kakšno obliko mora imeti Greenova funkcija določimo s pomočjo Fourierove transformacije.

$$G(x^\mu, \xi^\mu) = \frac{1}{(4\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} G(k_\mu) e^{ik_\mu(x^\mu, \xi^\mu)} d^4k \tag{5}$$

in

$$\delta^4(x^\mu, \xi^\mu) = \frac{1}{(4\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_\mu(x^\mu, \xi^\mu)} d^4k \tag{6}$$

Fourierovi transformaciji (en. 5 in 6) vstavimo v enačbo 4 in dobimo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_\mu(x^\mu, \xi^\mu)} \left[-G(k_\mu)k^2 - 1\right] d^4k = 0 \tag{7}$$

Iz česar sledi

$$G(k_\mu) = -\frac{1}{k^2} \qquad k^\mu = (k^0, \vec{k}) \tag{8}$$

$$k^2 = k_\mu k^\mu = -(k^0)^2 + \vec{k}\cdot\vec{k}$$

Torej Greenova funkcija ima obliko

$$G(x^\mu, \xi^\mu) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{ik_\mu(x^\mu - \xi^\mu)} d^4k \tag{9}$$

$$\begin{aligned} G(x^\mu, \xi^\mu) &= -\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\vec{k}\cdot\vec{k} - (k^0)^2} e^{i\left[k_0(t-t') + \vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')\right]} dk^0 d^3\vec{k} & (10)\\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\vec{k}\cdot\vec{k} - (k^0)^2} e^{-ik^0(t-t')} dk^0}_{\sharp}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} d^3\vec{k} & (11) \end{aligned}$$

Izračunajmo najprej notranji integral ($\sharp$). Integral ima pol pri $k^0 = \pm|\vec{k}|$ in ga je najbolj pripravno reševati s pomočjo izreka o residuih. Če želimo uporabiti izrek o residuih, ne smejo singularnosti ležati na realni osi, kar dosežemo tako, da pole infinitizimalno premaknemo v imaginarno polravnino za nek ϵ. Naprimer enega gor drugega dol.

$$k^2 - (k^0)^2 = (k + k^0)(k - k^0) = 0 \quad \rightarrow \quad \big((k + i\epsilon) + k^0\big)\big((k + i\epsilon) - k^0\big) = 0$$

Nova pola sta sedaj:

$$k_1^0 = -(k + i\epsilon) \quad \text{in} \quad k_2^0 = k + i\epsilon$$

Izrek o residuumu se glasi

$$\oint_{(K)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Res} f(z)|_{z=z_k}, \qquad \mathrm{Res} f(z)|_{z=z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[f(z)(z-z_0)^m],$$

kjer so z_k poli funkcije $f(z)$ in m stopnja pola. Izračunajmo najprej residuum funkcije $f(z)$. Integrirali bomo po poti od $-R$ do R ter po krogu z radijem R od kota 0 do π. Pot zajema pol $k_2^0 = k + i\epsilon$, ki je enostaven pol. Torej

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\left[\frac{e^{-ik^0(t-t')}}{((k+i\epsilon)+k^0)\,((k+i\epsilon)-k^0)}\right]\Big|_{k^0=k_2^0} &= \lim_{k^0\to(k+i\epsilon)}\left[\frac{e^{-ik^0(t-t')}\,((k+i\epsilon)-k^0)}{((k+i\epsilon)+k^0)\,((k+i\epsilon)-k^0)}\right]\\ &= \frac{e^{-i(k+i\epsilon)(t-t')}}{2(k+i\epsilon)} \end{aligned}$$

$$\sharp = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k^0(t-t')}}{((k-i\epsilon)+k^0)\,((k+i\epsilon)-k^0)} dk^0 = \begin{cases} 0, & \text{za } t < t', \\ \frac{2\pi i}{2k}\left[e^{-ik(t-t')}\right], & \text{za } t > t'. \end{cases}$$

Sledi

$$G(x^\mu,\xi^\mu) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\pi i}{2k}\left[e^{-ik(t-t')}\right]e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\Theta(t-t')d^3\vec{k},$$

kjer je $\theta(t-t')$ Heavisideova funkcija. Uporabimo zvezo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3k = 2\pi\int_{-1}^{1} d(\cos\phi)\int_0^{\infty} k^2 dk$$

Ko integriramo po $\cos\phi$ dobimo

$$G(x^\mu,\xi^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\frac{e^{-ik(t-t')}}{2|\vec{r}-\vec{r}'|}\left(e^{ik(|\vec{r}-\vec{r}'|)} - e^{-ik(|\vec{r}-\vec{r}'|)}\right)\Theta(t-t')dk$$

Zgornji izraz ima obliko obratne Fourierove transformacije. Iskana oblika Greenove funkcije je torej

$$G(x^\mu,\xi^\mu) = -\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta(|\vec{r}-\vec{r}'| - |t-t'|). \tag{12}$$

Dobljeno Greenovo funkcijo sedaj vstavimo v enačbo 3

$$\begin{aligned} A^\mu &= -\frac{\mu_0 e}{4\pi}\int\frac{\delta(|\vec{r}-\vec{r}'| - |t-t'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\int\dot{\xi}^\mu(\tau)\delta^4(x^\mu-\xi^\mu(\tau))d\tau dt' d^3\vec{r}' && (13)\\ &= \frac{\mu_0 e}{4\pi}\int\frac{\delta(t-\xi^0(\tau)-|\vec{r}-\vec{\xi}(\tau)|)}{|\vec{r}-\vec{\xi}(\tau)|}\dot{\xi}^\mu(\tau)d\tau && (14)\end{aligned}$$

Uporabimo pravilo za δ funkcijo

$$\delta\left(f(x)\right) = \sum_i\frac{1}{\left|\frac{df}{dx}\right|_{x_i}}\delta(x-x_i), \qquad f(x_i)=0$$

Torej

$$\begin{aligned} f(\tau) &= t-\xi^0(\tau)-|\vec{r}-\vec{\xi}(\tau)|\\ \frac{df}{d\tau} &= -\dot{\xi}^0(\tau) - \frac{\vec{r}-\vec{\xi}(\tau)}{|\vec{r}-\vec{\xi}(\tau)|}(-\dot{\vec{\xi}}(\tau))\\ \left.\frac{df}{d\tau}\right|_{\tau_r} &= -\dot{\xi}^0(\tau_r) + \dot{\vec{\xi}}(\tau_r)\frac{\vec{r}-\vec{\xi}(\tau_r)}{|\vec{r}-\vec{\xi}(\tau_r)|}\dot{\vec{\xi}}(\tau_r)\\ &= -\dot{\xi}^0(\tau_r)\left(1-\frac{\vec{r}-\vec{\xi}(\tau_r)}{|\vec{r}-\vec{\xi}(\tau_r)|}\cdot\vec{v}\right) \qquad \vec{v} = \frac{\dot{\vec{\xi}}(\tau_r)}{\dot{\xi}^0(\tau_r)}\\ \delta(f(\tau)) &= \frac{1}{-\dot{\xi}^0(\tau_r)\left(1-\frac{\vec{r}-\vec{\xi}(\tau_r)}{|\vec{r}-\vec{\xi}(\tau_r)|}\cdot\vec{v}\right)}\delta(\tau-\tau_r)\end{aligned}$$

Dobljeni izraz vstavimo v 14 in dobimo rezultat za četverec elektromagnetnega potenciala

$$A^\mu = \frac{\mu_0 e}{4\pi}\frac{\dot{\xi}^\mu(\tau_r)}{\dot{\xi}^0(\tau_r)\left(|\vec{r}-\vec{\xi}(\tau_r)| - (\vec{r}-\vec{\xi}(\tau_r))\cdot\vec{v}\right)}. \tag{15}$$

2.2 Elektromagnetni potencial

Četverec elektromagnetnega potenciala lahko zapišemo v komponentni obliki kot vektorski in skalarni potencial

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 e}{4\pi}\frac{\vec{v}}{\rho - \frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{c}} \qquad \phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\rho - \frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{c}} \tag{16}$$

2.3 Električno polje

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{17}$$

Ker nastopata v zgornih enačbah dva časa: t - čas odziva in τ - čas izvora, moramo odvode v enačbi 17 zapisati

$$\nabla\phi = \nabla_\tau\phi + \frac{\partial\phi}{\partial\tau}\nabla\tau \qquad \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t}.$$

Da bo bolj pregledno izračunajmo vsak člen posebej.

$$\nabla_\tau\phi = \nabla_\tau\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\rho - \frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{c}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{-\frac{\vec{\rho}}{\rho} + \frac{\vec{v}}{c}}{\left(\rho - \frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}, \qquad \nabla_\tau\rho = \frac{\vec{\rho}}{\rho} \qquad \nabla_\tau\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{c} = \frac{\vec{v}}{c}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{-\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{\rho} + \frac{v^2}{c} - \frac{\vec{\rho}\cdot\vec{a}}{c}}{\left(\rho - \frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial\tau} = -\frac{\vec{\rho}}{\rho}\cdot\vec{v} \qquad \frac{\partial(\vec{\rho}\cdot\vec{v})}{\partial\tau} = -v^2 + \vec{\rho}\cdot\vec{a}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\tau &= \nabla(t - \frac{\rho}{c}) \qquad\qquad \nabla f = \nabla_\tau f + \frac{\partial f}{\partial\tau}\nabla\tau \\
&= 0 - \frac{1}{c}\left(\nabla_\tau\rho + \frac{\partial\rho}{\partial\tau}\nabla\tau\right) \\
&= -\frac{1}{c}\left(\frac{\vec{\rho}}{\rho} - \frac{\vec{\rho}}{\rho}\cdot\vec{v}\nabla\tau\right) \\
\Rightarrow \nabla\tau &= -\frac{\frac{1}{c}\frac{\vec{\rho}}{\rho}}{1 - \frac{1}{c}\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{\rho}}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\mu_0 e}{4\pi}\frac{\vec{v}}{\rho - \frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{c}} = \frac{\mu_0 e}{4\pi}\left(\frac{\vec{a}\left(\rho - \frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{c}\right) - \vec{v}\left(-\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{\rho} + \frac{v^2}{c} - \frac{\vec{\rho}\cdot\vec{a}}{c}\right)}{\left(\rho - \frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}\right), \qquad \frac{\partial\vec{v}}{\partial\tau} = \vec{a}$$

$$\frac{\partial t}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\tau + \frac{\rho}{c}\right) = 1 - \frac{1}{c}\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{\rho} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{1}{c}\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{\rho}}$$

Sedaj zberimo vse člene skupaj. Skupni imenovalec je

$$c^2\left(\rho-\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2\left(1-\frac{1}{c}\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{\rho}\right)$$

Ko v števcu zmnožimo vse člene in upoštevamo $\frac{\vec{\rho}}{\rho}=\hat{n}$ dobimo:

$$\hat{n}c^2-c\vec{v}-\underline{c\hat{n}(\hat{n}\cdot\vec{v})}+\underline{\vec{v}(\hat{n}\cdot\vec{v})}+\underline{c\hat{n}(\hat{n}\cdot\vec{v})}-\hat{n}v^2+\hat{n}(\rho\cdot\vec{a})-\vec{a}\rho+\vec{a}\left(\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{c}\right)-\underline{\vec{v}(\hat{n}\cdot\vec{v})}+\vec{v}\frac{v^2}{c}-\vec{v}\left(\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{a}}{c}\right)$$

Podčrtani členi se odštejejo. Da čim bolj poenostavimo, uporabimo vektorsko identiteto $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

$$\hat{n}(c^2-v^2)+\frac{\vec{v}}{c}(v^2-c^2)+\rho\times(\hat{n}\times\vec{a})+\rho\times(\vec{a}\times\frac{\vec{v}}{c})$$

Končni rezultat za električno polje, ki ga ustvarja gibajoč naboj je torej:

$$\vec{E}=\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left(\hat{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)(c^2-v^2)+\vec{\rho}\times\left((\hat{n}-\frac{\vec{v}}{c})\times\vec{a}\right)}{c^2\left(\rho-\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2\left(1-\frac{1}{c}\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{\rho}\right)} \tag{18}$$

2.4 Magnetno polje

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A} \tag{19}$$

Podobno kot pri izračunu električnega polja moramo odvajati posredno, ker imamo dva časa (t in τ).

$$\nabla\times\vec{A}=\nabla_\tau\times\vec{A}-\frac{\partial\vec{A}}{\partial\tau}\times\nabla\tau$$

Člena $\frac{\partial\vec{A}}{\partial\tau}$ in $\nabla\tau$ smo že izračunali pri izračunu električnega polja. Ostane nam samo prvi čelen.

$$\begin{aligned}\nabla_\tau\times\vec{A} &= \nabla_\tau\times\frac{\mu_0 e}{4\pi}\frac{\vec{v}}{\rho-\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{c}} \qquad\qquad \nabla\times(f\vec{U})=f(\nabla\times\vec{U})+\nabla f\times\vec{U}\\ &= \frac{\mu_0 e}{4\pi}\left(\frac{\nabla\times\vec{v}}{\rho-\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{c}}+\frac{-\frac{\vec{\rho}}{\rho}+\frac{\vec{v}}{c}}{\left(\rho-\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}\times\vec{v}\right)\\ &= \frac{\mu_0 e}{4\pi}\left(\frac{-\frac{\vec{\rho}}{\rho}\times\vec{v}}{\left(\rho-\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}\right)\end{aligned}$$

Spet zberemo vse člene skupaj. Tokrat je skupni imenovalec

$$c\left(\rho-\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2\left(1-\frac{1}{c}\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{\rho}\right).$$

Števec pa je:

$$c(\vec{v}\times\hat{n})(1-\frac{\hat{n}\cdot\vec{v}}{c})+\left(\vec{a}\rho-\vec{a}(\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{c})+\vec{v}(\hat{n}\cdot\vec{v})-\vec{v}\frac{v^2}{c}+\vec{a}(\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{a}}{c})\right)\times\hat{n}$$

in malo polepšano

$$\left[\vec{v}(c-\frac{v^2}{c})+\frac{\vec{\rho}}{c}\times(\vec{v}\times\vec{a})+\vec{a}\rho\right]\times\hat{n}$$

Magnetno polje, ki ga ustvarja gibajoč naboj je torej

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 e}{4\pi}\frac{\left[\vec{v}(c-\frac{v^2}{c})+\frac{\vec{\rho}}{c}\times(\vec{v}\times\vec{a})+\vec{a}\rho\right]\times\hat{n}}{c\left(\rho-\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2\left(1-\frac{1}{c}\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{\rho}\right)} \tag{20}$$

3 Sevanje

Energijski tok, ki ga seva gibajoč naboj v prostor nam določa Poyntingov vektor

$$\vec{P}=\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) \tag{21}$$

Zanima nas kotna porazdelitev energijskega toka daleč stran od nabojev, zato poglejmo, kako se ta približek pozna v enačbah za električno in magnetno polje (enačbi 18 in 20). Pri obeh enačbah prvi člen pada z razdaljo sorazmerno z $\frac{1}{\rho^2}$, drugi člen pa z $\frac{1}{\rho}$, zato pri velikih razdaljah drugi člen prevlada. V veliki razdalji od nabojev se enačbi za polji poenostavita v

$$\vec{E}=\frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{\rho}\times\left((\hat{n}-\frac{\vec{v}}{c})\times\vec{a}\right)}{c^2\left(\rho-\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2\left(1-\frac{1}{c}\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{\rho}\right)} \quad \text{in} \quad \vec{B}=\frac{\mu_0 e}{4\pi}\frac{\left[\frac{\vec{\rho}}{c}\times(\vec{v}\times\vec{a})+\vec{a}\rho\right]\times\hat{n}}{c\left(\rho-\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2\left(1-\frac{1}{c}\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{v}}{\rho}\right)} \tag{22}$$

Števec enačbe za magnetno polje lahko malo preoblikujemo

$$*=\left[\frac{\vec{\rho}}{c}\times(\vec{v}\times\vec{a})+\vec{a}(\vec{\rho}\cdot\hat{n})\right]\times\hat{n}=\left[\frac{\vec{\rho}}{c}\times(\vec{v}\times\vec{a})+\vec{\rho}\times(\vec{a}\times\hat{n})+\underline{\hat{n}(\vec{\rho}\cdot\vec{a})}\right]\times\hat{n}$$

Podčrtan člen odpade, ostalo se pa prepiše v

$$*=\left[\vec{\rho}\times\left((\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{a})+(\vec{a}\times\hat{n})\right)\right]\times\hat{n}=\hat{n}\times\left[\vec{\rho}\times\left((\hat{n}-\frac{\vec{v}}{c})\times\vec{a})\right)\right],$$

kar je ravno $\hat{n}\times$ števec pri E. Torej velja zveza

$$\vec{B}=\frac{1}{c}\left(\hat{n}\times\vec{E}\right) \tag{23}$$

Ko uporabimo zgornjo zvezo med $\vec{E}$ in $\vec{B}$ v enčbi za Poyntingov vektor, dobimo

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0 c}\vec{E} \times (\hat{n} \times \vec{E}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(\hat{n}E^2 - \vec{E}(\vec{E} \cdot \hat{n})\right)$$

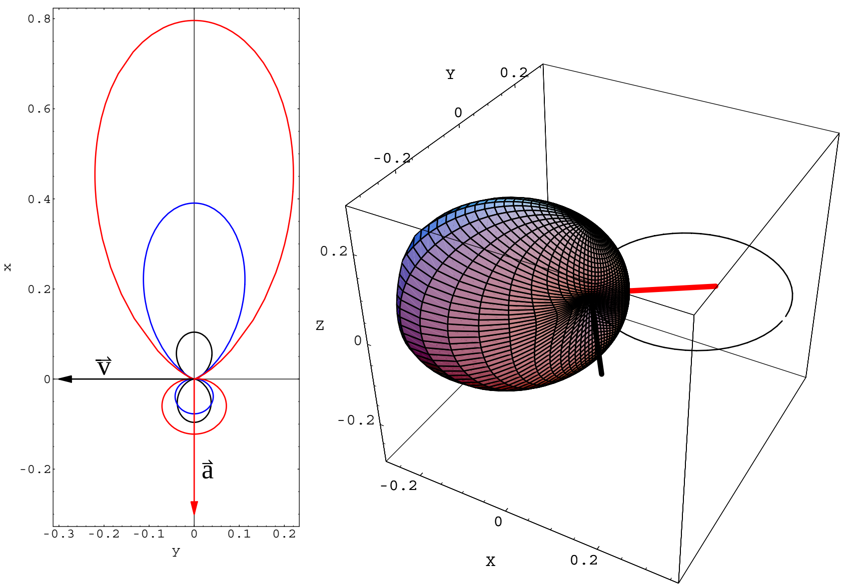
Smerni vektor $\hat{n}$ in vektor $\vec{E}$ sta pravokotna, zato drugi člen odpade. Končni rezultat je torej

$$\vec{P} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 \hat{n} \tag{24}$$

oziroma

$$\vec{P} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left[\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{\rho} \times \left((\hat{n} - \frac{\vec{v}}{c}) \times \vec{a} \right)}{c^2 \left(\rho - \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{v}}{c} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{c} \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{v}}{\rho} \right)} \right]^2 \hat{n} \tag{25}$$

3.1 Enakomerno kroženje naboja



Slika 1: Kotna porazdelitev izsevanega energijskega toka v smeri normale v primeru, da sta hirost in pospešek pravokotna (enakomerno kroženje) pri treh različnih hitrostih delca: $\beta = 0.01$ (črna), $\beta = 0.2$ (modra), $\beta = 0.23$ (rdeča)(levo). 3D prikaz izsevanega toka pri $\beta = 0.2$. Črna črta prikazuje smer hitrosti, rdeča pa pospeška (desno).

Pri enakomernem kroženju sta pospešek in hitrost pravokotna $(\vec{v} \cdot \vec{a}) = 0$. Najprej zapišimo izraz 25 malo drugače

$$\vec{P} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left[\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\hat{n}\cdot\vec{a})(\hat{n}-\frac{\vec{v}}{c}) - (1-\frac{\hat{n}\cdot\vec{v}}{c})\vec{a}}{c^2\rho\left(1-\frac{\hat{n}\cdot\vec{v}}{c}\right)^3} \right]^2 \hat{n} \tag{26}$$

Ko skvadriramo in upoštevamo $\vec{v}\cdot\vec{a} = 0$ dobimo

$$\vec{P} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left[\frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0^2} \frac{a^2(1-\frac{\hat{n}\cdot\vec{v}}{c})^2 - (\hat{n}\cdot\vec{a})^2(1-\frac{v^2}{c^2})}{c^4\rho^2\left(1-\frac{\hat{n}\cdot\vec{v}}{c}\right)^6} \right] \hat{n} \tag{27}$$

Izračunati moramo skalarna produkta med $\hat{n}$ in hitrostjo ter pospeškom. Postavimo koordinatni sistem tako, da leži orbita naboja v xy ravnini, opazovana točka pa v yz ravnini. Vektor $\vec{\rho}$ je vektor med nabojem in točko kjer opazujemo. Ker nas zanima sevanje daleč stran, lahko vektor od koordinatnega izhodišča, ki je v središču kroga, do točke kjer opazujemo enačimo kar z vektorjem $\vec{\rho}$.

$$\vec{\rho} = \rho(0,\sin\theta,\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad \hat{n} = (0,\sin\theta,\cos\theta).$$

Hitrost in pospešek pa zapišemo z vektorjema

$$\vec{v} = v_0(\cos\omega\tau, \sin\omega\tau, 0) \qquad \vec{a} = \omega v_0(-\sin\omega\tau, \cos\omega\tau, 0).$$

Iskana sklarna produkta sta:

$$\vec{n}\cdot\vec{v} = v_0\sin\omega\tau\sin\theta, \qquad \vec{n}\cdot\vec{a} = v_0\omega\cos\omega\tau\sin\theta$$

$$\vec{P} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left[\frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0^2} \frac{a^2(1-\beta\sin\omega\tau\sin\theta)^2 - a^2(\cos\omega\tau\sin\theta)^2(1-\beta^2)}{c^4\rho^2\left(1-\beta\sin\omega\tau\sin\theta\right)^6} \right] \hat{n}. \tag{28}$$

Pri enačbi 28 so hitrost, pospešek in ω v takšni zvezi:

$$\omega = \frac{\beta c}{r_0} \qquad a = \omega\beta c,$$

kjer je r_0 polmer kroga po katerem kroži delec.

3.2 Kroženje dveh nabojev okrog skupnega težišča

Tu si bomo ogledali sevanje dveh enakih nabojev nasprotnega predznaka, ki krožita okrog skupnega težišča. Koordinatni sistem postavimo v težišče obeh delcev, kot prikazuje slika 2. Sevanje enega delca smo že opisali v prejšnjem razdelku. Sedaj moramo vso stvar razširiti na dva delca. Sešteti moramo električno polje, ki ga ustvarja vsak od delcev

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \tag{29}$$

Pri energijskem toku potrebujemo kvadrat polja

$$E^2 = (\vec{E}_1+\vec{E}_2)^2 = \vec{E}_1\cdot\vec{E}_1 + \vec{E}_2\cdot\vec{E}_2 + 2\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2,$$

kjer je zadnji člen odgovoren za interferenco, podobno kot pri uklonski mrežici. Za prvi delec imamo:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= b(\cos(\omega\tau_1), \sin(\omega\tau_1), 0)\\ \vec{v}_1 &= v_0(-\sin(\omega\tau_1), \cos(\omega\tau_1), 0)\\ \vec{a}_1 &= v_0\omega(-\cos(\omega\tau_1), -\sin(\omega\tau_1), 0)\\ \vec{r} &= r(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),\end{aligned}$$

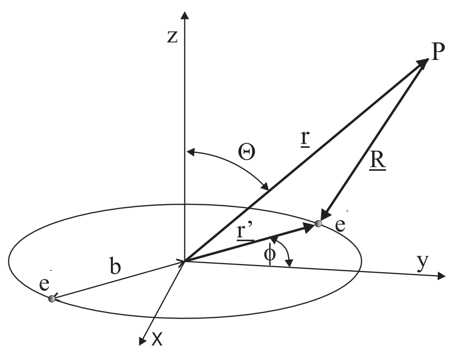
kjer je $\vec{r}_1$ vektor od koordinatnega izhodišča do prvega naboja, $\vec{v}_1$ hitrost, $\vec{a}_1$ pospešek ter $\vec{r}$ vektor od koordinatnega izhodišča do opazovane točke. Za drugi delec je podobno, le pri časovnem delu moramo dodati fazno razliko π, torej $\omega\tau_2 + \pi$. Električno polje, ki ga ustvarja enakomerno krožeči delec ima obliko

$$\vec{E}_i = \frac{e_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{n}_i \cdot \vec{a}_i)(\vec{n}_i - \frac{\vec{v}_i}{c}) - (1 - \frac{\vec{n}_i \cdot \vec{v}_i}{c})\vec{a}_i}{c^2 \rho_i \left(1 - \frac{\vec{n}_i \cdot \vec{v}_i}{c}\right)^3}, \tag{30}$$

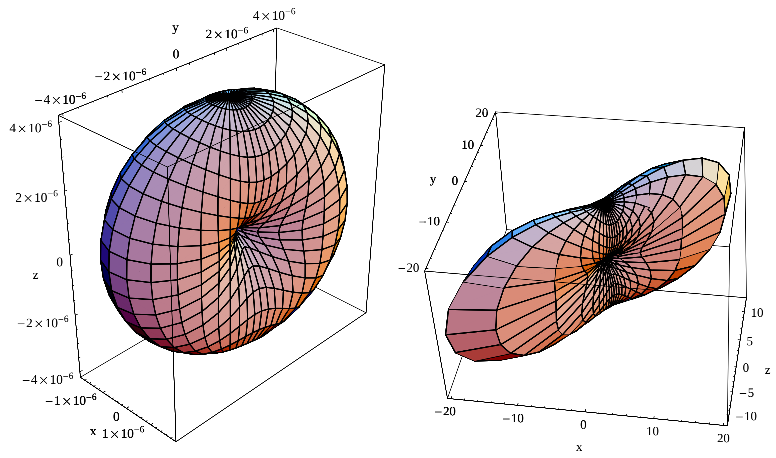
kjer i označuje kateri delec opisuje enačba. Izračunati moramo še retardirana časa τ_1 in τ_2

$$\tau_i = t - \frac{\rho_i}{c} \qquad \rho_i = |\vec{r} - \vec{r}_i| = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\sin\theta\cos(\omega\tau_i - \varphi)}$$

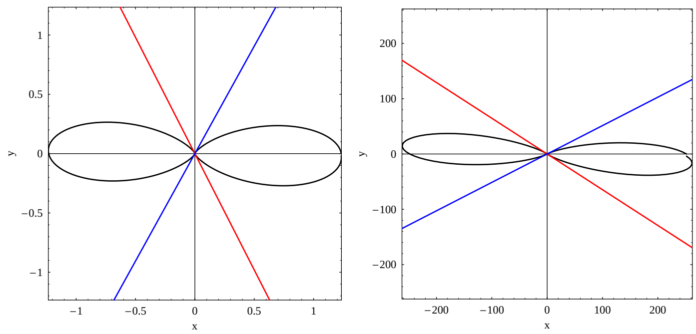
Gre za transcedentno enačbo, zato retardiran čas izračunamo numerično. Ker potrebujemo pri izsevanem toku kvadrat električnega polja, najprej polji seštejemo po enačbi 29 ter nato izračunamo kvadrat polja, ki ga potrebujemo pri izračunu energijskega toka. Če smo dovolj daleč, velja $\vec{n}_1 \approx \vec{n}_2 \approx \vec{n}$, pri čemer je $\vec{n}$ enotski vektor v smeri od težišča do opazovalca. Poglejmo tudi kako se spreminja kot v katerega sevata naboja v odvisnosti od hitrosti. Kot vidimo na sliki 4 je sevalni kot vedno manjši z večanjem hitrosti. Pri veliki hitrosti vidi opazovalec le še kratke bliske. Frekvenčni spekter dobimo s pomočjo Fourierove transformacije. Sevalni tok, ki ga vidi opazovalec je sestavljen iz množice sinusov in cosinusov različnih frekvenc. Slika 6 prikazuje dva frekvenčna spektra, enega pri zelo majhni hitrosti, drugega pri veliki hitrosti.



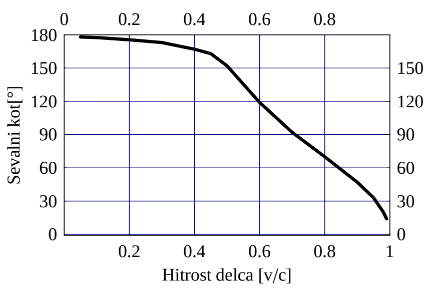
Slika 2: Postavitev koordinatnega sistema za kroženje dveh delcev.



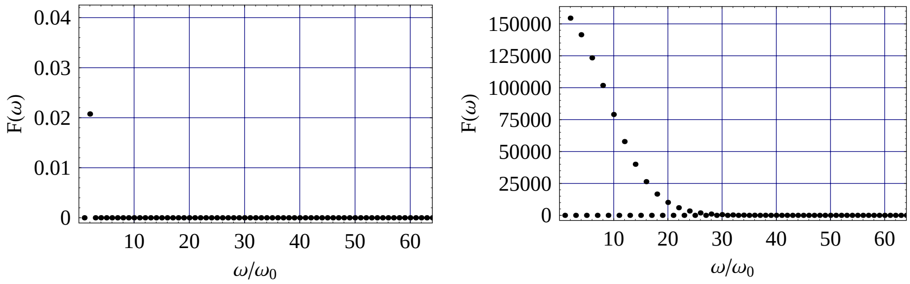
Slika 3: Kotna porazdelitev izsevanega energijskega toka, ki ga ustvarjata dva naboja krožeča okrog skupnega težišča pri $\beta = 0.01$ (levo) in $\beta = 0.4$ (desno).



Slika 4: Kotna porazdelitev izsevanega energijskega toka, ki ga ustvarjata dva naboja krožeča okrog skupnega težišča pri $\beta = 0.5$ (levo) in $\beta = 0.8$ (desno) v ravnini kroženja. Črti označujeta kot v katerega sistem seva.



Slika 5: Kot v katerega sevata dva elektrona krožeča okrog skupnega težišča v odvisnosti od njune hitrosti.

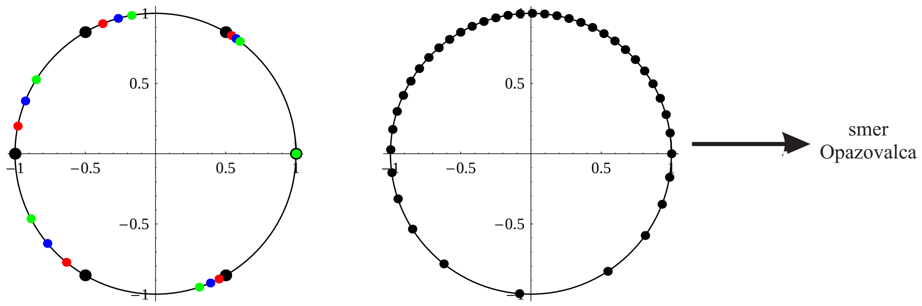


Slika 6: Frekvenčni spekter izsevanega toka pri dveh hitrostih nabojev: $\beta = 0.01$ (levo) in $\beta = 0.9$ (desno).

3.3 Kroženje N nabojev okrog skupnega težišča

3.3.1 Retardirane lege nabojev

Najprej si oglejmo, kako vidi opazovalec lego nabojev, ki enakomerno krožijo. Zaradi dejstva, da informacija o legi naboja potuje s končno hitrostjo c, je lega naboja, ki jo vidi opazovalec drugje, kot je v koordinatnem sistemu delca. Kot vidimo na sliki 8, opazovalec

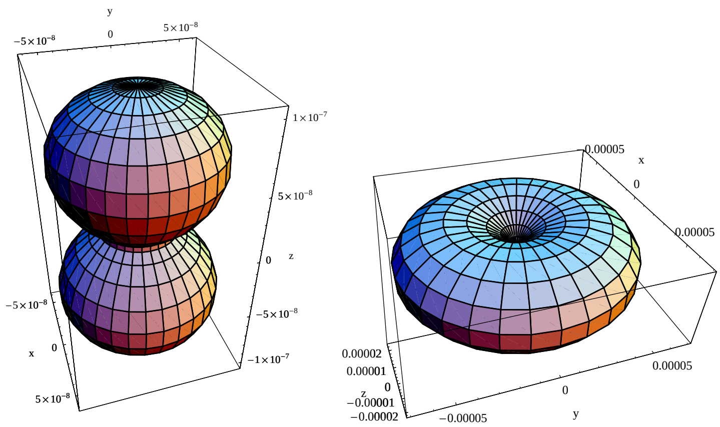


Slika 7: Lega nabojev, kakor jih vidi opazovalec, ki je v ravnini zanke in daleč stran od nje pri štirih različnih hitrostih: $v = 0c$(črna), $v = 0.1c$(rdeča),$v = 0.2c$(modra),$v = 0.3c$(zelena) (levo) in lega 40-ih delcev pri hitrosti $v = 0.7c$, kakor jih vidi opazovalec (desno). Vsi naboji se gibljejo enakomerno v nasprotni smeri urinega kazalca.

vidi naboje vedno bolj gosto na eni strani zanke, če večamo hitrost nabojev.

3.3.2 Sevanje enakomerno krožečih enakih nabojev

V tem razdelku bomo uporabili kar rezultat iz prejšnjega razdelka (3.2). Naredili bomo samo posplošitev, da imamo več nabojev, ki so razporejeni ekvidistantno po krožnici po kateri krožijo. Izračunati moramo celotno električno polje, ki ga potrebujemo za izračun



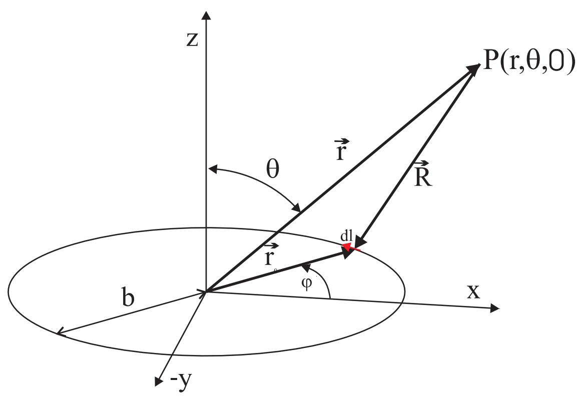
Slika 8: Sevanje dvajsetih nabojev, ki enakomerno krožijo s hitrostjo $v_0 = 0.3c$. Upoštevamo retardiran čas $\tau_i = t - \frac{\rho_i}{c}$ (levo), ne upoštevamo retardiranega časa: $\tau = t$ (desno).

sevalnega toka.

$$\vec{E} = \sum_i^N \vec{E}_i$$

Pri seštevanju moramo biti previdni, da pravilno upoštevamo retardirano lego naboja. Ko imamo rezultat za električno polje, pa po enačbi 24 izračunamo koliko seva sistem v prostor.

3.4 Sevanje tokovne zanke



Naj po zanki teče električni tok $I(\tau)$. Električni tok je povezan s hitrostjo z naslednjo zvezo:

$$\vec{I}(\tau) = N e_0 \vec{v}(\tau), \tag{31}$$

kjer je N gostota nosilcev naboja, e_0 osnovni naboj in I električni tok. Naj se tok spreminja v zanki sinusno, torej je velikost toka v zanki enaka

$$I(\tau) = I_0 \sin(\omega_0 \tau) = N e_0 v(\tau) \qquad \Rightarrow \qquad v(\tau) = \frac{I_0}{N e_0} \sin(\omega_0 \tau)$$

Vektorji do točke na zanki, hitrosti in pospeška so

$$\begin{aligned} \vec{r} &= b\,(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \\ \vec{v}(\tau) &= \frac{I_0}{N e_0} \sin(\omega_0 \tau)\,(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \\ \vec{a}(\tau) &= \frac{I_0 \omega_0}{N e_0} \cos(\omega_0 \tau)\,(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) + \left(\frac{I_0}{N e_0} \sin(\omega_0 \tau)\right)^2 (-\cos\varphi, -\sin\varphi, 0) \end{aligned}$$

Vektor do opazovane točke je

$$\vec{r} = r\,(\sin\theta\cos\psi, \sin\theta\sin\psi, \cos\theta)\,.$$

Tu lahko retardiran čas izračunamo že v naprej

$$\tau(\varphi) = t - \frac{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\theta\cos(\psi - \varphi)}}{c}$$

Celotno električno polje, ki ga povzroča tokovna zanka dobimo z integracijo po zanki.

$$\vec{E} = \int_0^{2\pi} \frac{N_l e_0}{4\pi\epsilon_0 2\pi} \frac{(\hat{n}(\varphi)\cdot\vec{a}(\varphi))(\hat{n}(\varphi) - \frac{\vec{v}(\varphi)}{c}) - (1 - \frac{\hat{n}(\varphi)\cdot\vec{v}(\varphi)}{c})\vec{a}(\varphi)}{c^2 \rho(\varphi)\left(1 - \frac{\hat{n}(\varphi)\cdot\vec{v}(\varphi)}{c}\right)^3} d\varphi$$

3.4.1 Konstanten tok

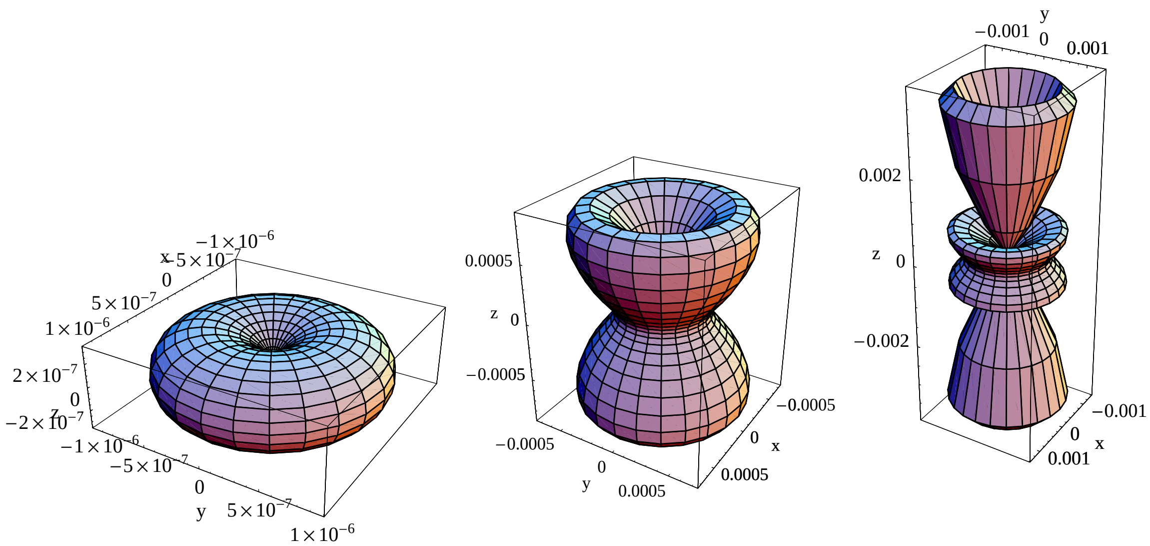
Poglejmo si kakšen energijski tok seva v prostor tokovna zanka po katri teče konstanten tok $I = I_0$. Izrazi v razdelku 3.4 se poenostavijo v

$$\begin{aligned} I(\tau) &= I_0 = N e_0 v(\tau) \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{I_0}{N e_0} \\ \vec{r} &= b\,(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \\ \vec{v} &= \frac{I_0}{N e_0}\,(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \\ \vec{a}(\tau) &= \left(\frac{I_0}{N e_0}\right)^2 (-\cos\varphi, -\sin\varphi, 0) \end{aligned}$$

Rezultat je neodvisen od časa, zato tudi tokovna zanka, po kateri teče konstanten tok ne seva sevalnega toka.

3.4.2 Izmeničen tok

Po zanki naj teče izmeničen tok oblike $I(\tau) = I_0 \sin(\omega_0 \tau)$. Rezultat za ta primer smo izračunali že v 3.4. Kaj se dogaja s spreminjanjem frekvence ω_0, nam najbolj nazorno pogažejo slike 9.



Slika 9: Sevanje tokovne zanke, po kateri teče izmeničen tok. Amplituda toka je $I_0 = 0.3$, frekvence pa so $\omega_0 = 0$ (levo), $\omega_0 = 3.0$ (na sredini) in $\omega_0 = 6.0$ (desno).