

Teorija gravitacije

Domača naloga

Efekt vlečenja koordinatnega sistema (Frame-dragging effect)

Nika Oman

September 2006

Naloga

Radi bi raziskali vpliv vrteče se mase na prostor-čas. Računali bomo za vrtečo se črno luknjo z maso M in vrtilno količino L v praznem prostoru (vakuumu).

Uvod

V splošni teoriji relativnosti gravitacijo obravnavamo kot ukrivljenost prostora-časa in ne kot silo, kot smo vajeni iz Newtonove mehanike. Osnovne enačbe splošne teorije relativnosti, ki povezujejo to ukrivljenost z maso oz. energijo, so Einsteinove enačbe polja, rešitve pa so metrike, s katerimi opišemo prostor-čas.

Vrtenje mase povzroči t.i. efekt vlečenja sistema, to je vrtenje prostora-časa samega. Povedali bomo nekaj značilnosti metrike, podrobneje pa se bomo posvetili izračunu geodetsk svetlobe v tej metriki, saj nam te grafično najboljše prikažejo lastnosti prostora-časa.

Metrični tenzor in metrika prostora

Točko v 4-dimenzionalnem prostoru-času imenujemo dogodek, trajektorijo pa svetovnica. Oddaljenost med dvema diferencialno bližnjima dogodkoma (x^0, x^1, x^2, x^3) in $(x^0 + dx^0, x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ zapišemo kot:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

kjer upoštevamo Einsteinov sumacijski dogovor. $g_{\mu\nu}$ je *metrični tenzor*, ki opisuje koordinatni sistem in ukrivljenost prostora. Ker je tenzor simetričen ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$), ima v našem primeru največ 10 različnih komponent.

ds imenujemo *metrika prostora* in je neodvisna od izbire koordinat. Vse metrike, ki opisujejo fizikalne sisteme, morajo zadoščati Einsteinovim enačbam polja.

Einsteinove enačbe polja

Pri izpeljavi enačb polja je Einstein postavil zahteve, ki jim morajo zadostiti:

- 1) Enačbe polja morajo biti tenzorske in torej neodvisne od koordinatnih sistemov
- 2) Enačbe morajo biti parcialne diferencialne enačbe največ 2. reda in linearne v najvišjem redu
- 3) napetostni tenzor $T_{\mu\nu}$ naj bo vzrok gravitacijskega polja
- 4) V ravnem fizikalnem prostoru naj bo $T_{\mu\nu}$ ničelni tenzor

Zapišimo enačbe polja v osnovni obliki:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \frac{G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad ,$$

kjer je $G_{\mu\nu}$ Einsteinov tenzor, $T_{\mu\nu}$ napetostni tenzor, G gravitacijska konstanta, c pa svetlobna hitrost. Od tu naprej bomo pisali v enotah $G = c = 1$.

Ker v našem primeru gledamo polje mase v vakuumu, je $T_{\mu\nu} \equiv 0$.

To je sistem 10 sklopljenih diferencialnih enačb za 10 funkcij elementov metričnega tenzorja. Enačbe lahko zapišemo tudi drugače:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

Tu je $R_{\mu\nu}$ Riccijev tenzor ukrivljenosti, $g_{\mu\nu}$ metrični tenzor, R pa skalarna ukrivljenost, ki pa je povezana z metričnim in Riccijevim tenzorjem:

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}.$$

Riccijev tenzor $R_{\alpha\beta}$ dobimo iz Riemannovega tenzorja $R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$, ta pa je definiran preko Christoffelovih simbolov $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$:

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\lambda}^{\lambda}$$

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\delta, \gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma, \delta}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\delta}^{\mu} \Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\mu} \Gamma_{\mu\delta}^{\alpha}.$$

V štirih dimenzijah ima Riemannov tenzor 256 komponent. Z upoštevanjem nekaterih lastnosti tenzorja, se število neodvisnih komponent zmanjša.

Najprej upoštevamo:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta},$$

$$(R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\lambda} R_{\beta\gamma\delta}^{\lambda})$$

kar nam število neodvisnih komponent zreducira na 36. Nato upoštevamo še:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}.$$

Sedaj imamo le še 21 neodvisnih komponent. Ko pa zapišemo še:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0,$$

smo dobili končno število neodvisnih komponent 20.

Riemannov tenzor zadošča tudi dvema diferencialnima identitetama (Bianchijevi identiteti).

Christoffelovi simboli so povezani z odvodi metričnega tenzorja:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (g_{\beta\lambda, \gamma} + g_{\gamma\lambda, \beta} - g_{\beta\gamma, \lambda})$$

Sedaj vidimo, kako so enačbe polja povezane s komponentami metričnega tenzorja in njihovimi odvodi.

Enačbe so zapletene in celo Einstein ni verjel, da se bo kdaj našla kakšna analitična rešitev teh enačb. Vendar je prvo rešitev našel Schwarzschild le leto dni po Einsteinovi objavi. Ta rešitev je zunanja metrika za statično sferno simetrično (točkasto) maso. Drugo rešitev, za vrtečo se maso (aksialna simetrija), je šele 47 let kasneje našel Kerr. To je tudi rešitev našega problema in jo bomo zapisali v naslednjem poglavju. Analitična rešitev zaenkrat obstaja še za nabito mirujočo in nabito vrtečo se maso (Kerr-Newmanova) rešitev.

Kerrova rešitev Einsteinovih enačb

Ker imamo vrteč se sistem in aksialno simetrijo, rešitev (metriko) zapišemo v t.i. Boyer-Lindquistovih koordinatah (t, r, θ, ϕ). Povezava s kartezičnimi koordinatami je:

$$\begin{aligned} t &= t \\ x &= \sqrt{r^2 + a^2} \cos\phi \sin\theta \\ y &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin\phi \sin\theta \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

kjer je a parameter vrtenja ali t.i. specifična vrtilna količina:

$$a = \frac{L}{M}$$

Povejmo, kakšne vrednosti lahko zavzame parameter a :

$$0 \leq a \leq M$$

Rešitev za $a=0$ ustreza primeru brez vrtenja, torej Schwarzschildovi rešitvi s sferno simetrijo. Največja vrednost $a=M$ je določena z mejo gole singularnosti.

V Boyer-Lindquistovih koordinatah se Kerrova metrika glasi:

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \\ & \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2Mr \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 \end{aligned}$$

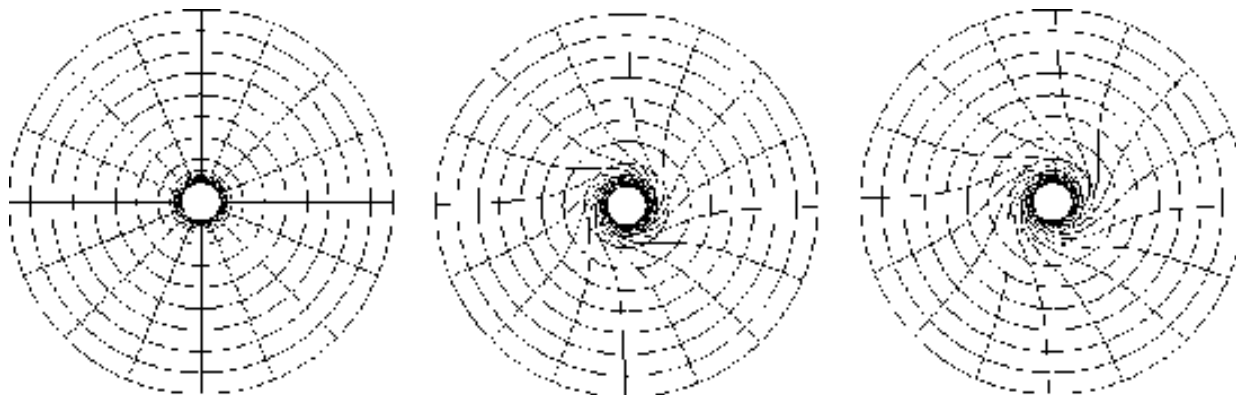
ali v tenzorski obliki:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2Mr}{\Sigma} & 0 & 0 & -\frac{2aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ -\frac{2aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} & 0 & 0 & \sin^2 \theta \left(a^2 + r^2 + \frac{2a^2Mr \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta \\ \Delta &= r^2 - 2Mr + a^2. \end{aligned}$$

■ Lastnosti Kerrove metrike

Kerova geometrija opisuje stacionarno zunanjo geometrijo prostora-časa in je asimptotsko ravna, kar pomeni, da je v neskončni razdalji od masivnega objekta enaka geometriji Minkovskega. Geometrija prostora je ob danem času aksialno simetrična. Izvendiagonalna elementa metrike $g_{\mu\nu}$ povzročita *efekt vlečenja* prostora-časa (frame dragging effect), zaradi česar se prostor-čas sam vrti okoli masivnega objekta; bolj ko se bližamo masivnemu objektu, hitrejše je vrtenje.



■ Singularnost črne luknje

Singularnost črne luknje v Kerrovi metriki ni točkasta kot v Schwarzschildovem primeru, pač pa rotacija povzroči singularnost po krožnici, ki ga določa pogoj $\Sigma=0$:

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$$

Za razliko od Schwarzschildove točkaste prostorske singularnosti, je Kerrova časovnega značaja; območje znotraj krožnice naj bi ustrezalo negativnemu prostoru-času; interpretacij tega pojava je več, nobena pa si zaenkrat še ni prislužila širšega znanstvenega konsenza.

■ Horizont dogodkov

Iz same metrike vidimo, da koeficient g_{11} pred diferencialom dr^2 divergira, ko je $\Delta=0$. Ploskvi, ki jo določa ta pogoj, pravimo *horizont dogodkov*. V primeru Kerrove metrike sta horizonta dva; notranji in zunanji horizont:

$$\Delta = r^2 - 2 M r + a^2 = 0$$

$$\begin{array}{l} R_H^- = M - \sqrt{M^2 - a^2} \\ R_H^+ = M + \sqrt{M^2 - a^2} \end{array}$$

Horizont dogodkov je meja, ko ubežna hitrost doseže svetlobno hitrost. Razdalja med obema horizontoma se manjša, hitrejše ko je vrtenje.

Zanimivo je tudi, da pri prehodu horizonta dogodkov koeficienta g_{00} in g_{11} pred diferencialoma dt^2 in dr^2 obrneta predznak, kar interpretiramo kot zamenjavo vlog prostora in časa. To se v primeru Kerrove črne luknje zgodi pri prehodu vsakega od horizontov, torej dvakrat.

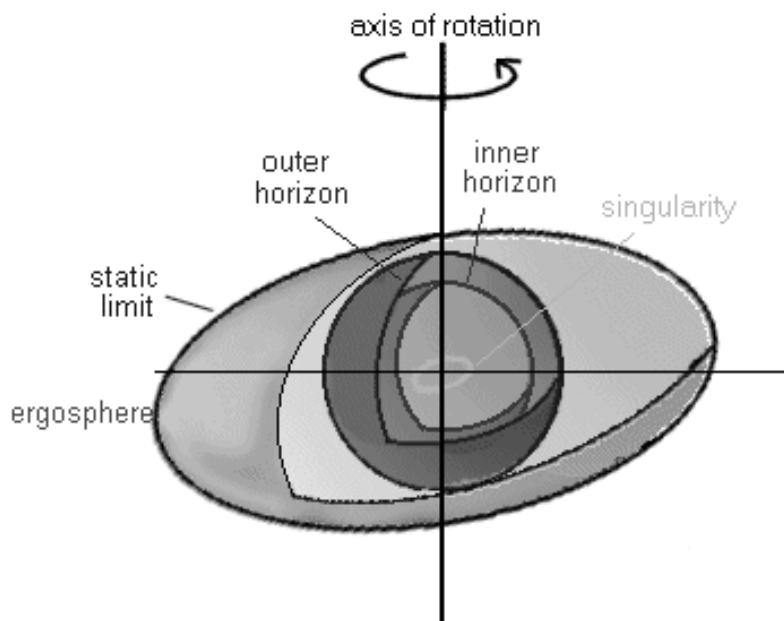
■ Stacionarna limita, ergosfera

Zaradi vrtenja prostora-časa dobimo v okolici objekta *stacionarno limito*: ploskev v prostoru-času, na kateri bi mirovali, če bi se s svetlobno hitrostjo premikali v nasprotni smeri vrtenja objekta. Znotraj te limite nič ne more ostati stacionarno, tudi če se giblje s svetlobno hitrostjo. Stacionarna limita se pojavi tam, kjer je koeficient g_{00} pred diferencialom dt^2 enak 0, torej:

$$1 - \frac{2 M r_{\text{stat}}}{r_{\text{stat}}^2 + a^2 \cos^2 \theta} = 0$$

$$r_{\text{stat}} = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$$

Vidimo, da je r_{stat} večji od r_- . Območje med stacionarno limito in zunanjim horizontom dogodkov imenujemo *ergosfera*. Delci, ki padejo v ergosfero se pospešijo (pridobijo energijo) zaradi vrtenja prostora-časa in, ker so še vedno zunaj horizonta dogodkov, lahko še uidejo proč od črne luknje. Možnost, da bi se dalo na ta način črpati energijo črne luknje, je predlagal Roger Penrose leta 1969.



■ Geodetka svetlobe v Kerrovi metriki

Geodetka je svetovnica, po kateri se giblje delec, na katerega ne deluje nobena zunanja sila. V splošni teoriji relativnosti ločimo tri tipe geodetk: časovna geodetka (tangenti vektor ima negativno normo), prostorska geodetka (tangenti vektor ima pozitivno normo) in ničelna geodetka (norma tangentnega vektorja je enaka 0). Geodetka svetlobe je ničelna, torej:

$$ds^2 = 0$$
$$g_{00} dt^2 + 2 g_{03} dt d\phi + g_{11} dr^2 + g_{22} d\theta^2 + g_{33} d\phi^2 = 0$$

Upoštevali smo simetrijo $g_{03} = g_{30}$.

Enačbo geodetke lahko zapišemo še drugače, s pomočjo afinega parametra λ :

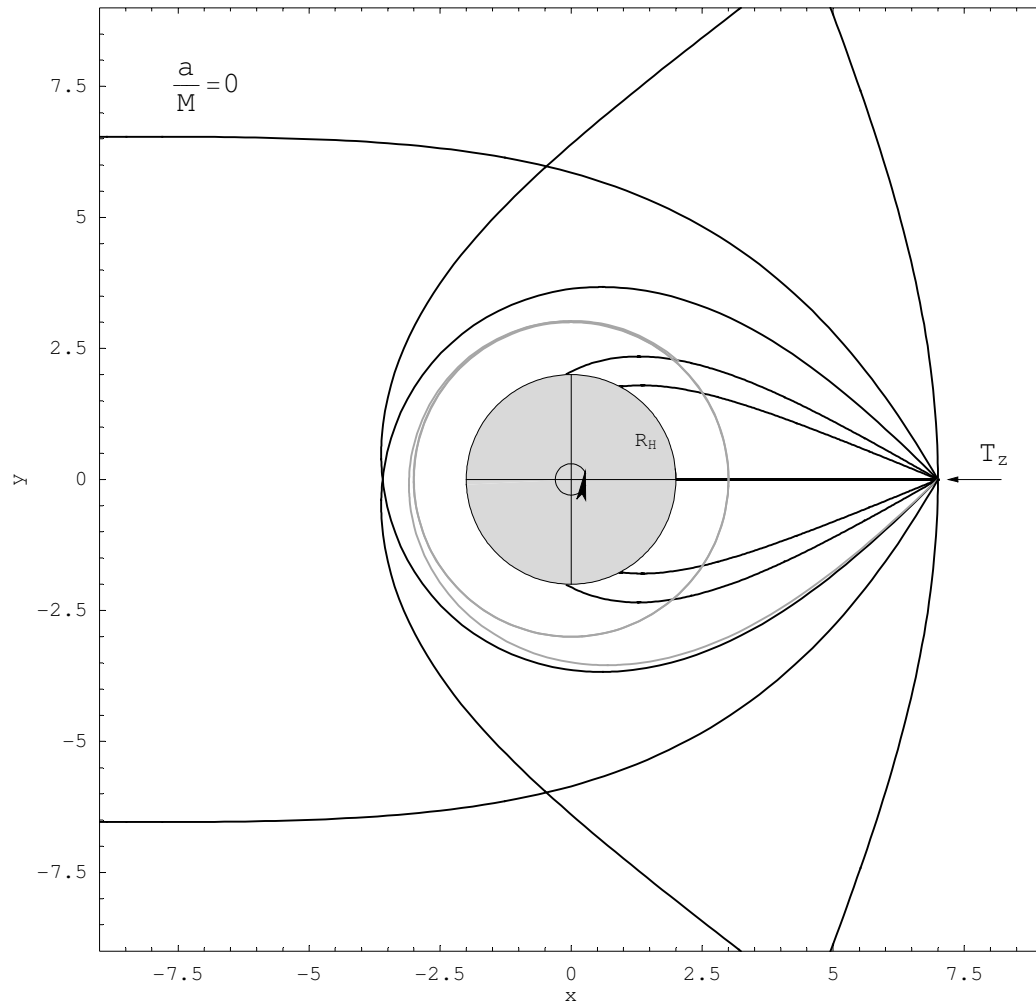
$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \lambda^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \lambda} = 0,$$

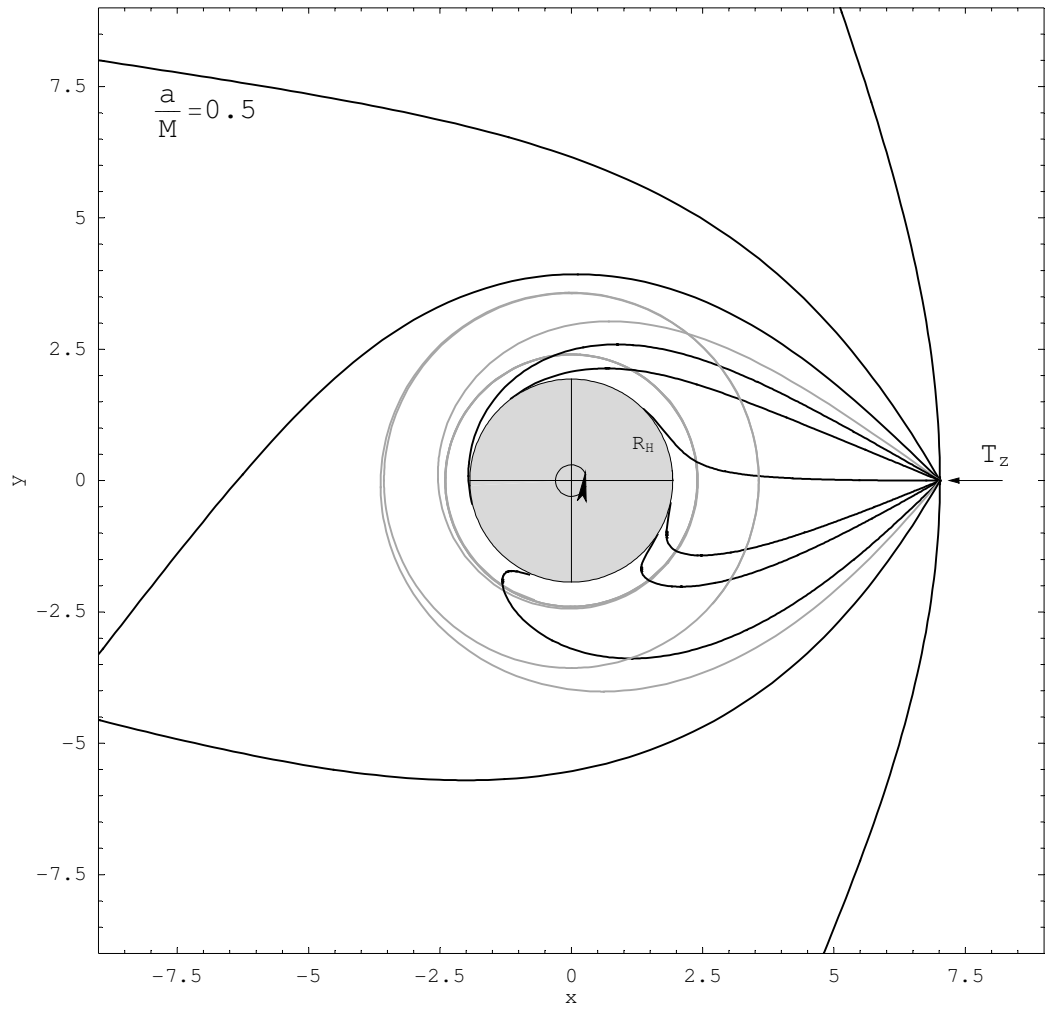
λ je afin parameter po krivulji (geodetki). $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ so Christoffelovi simboli, ki smo jih že definirali.

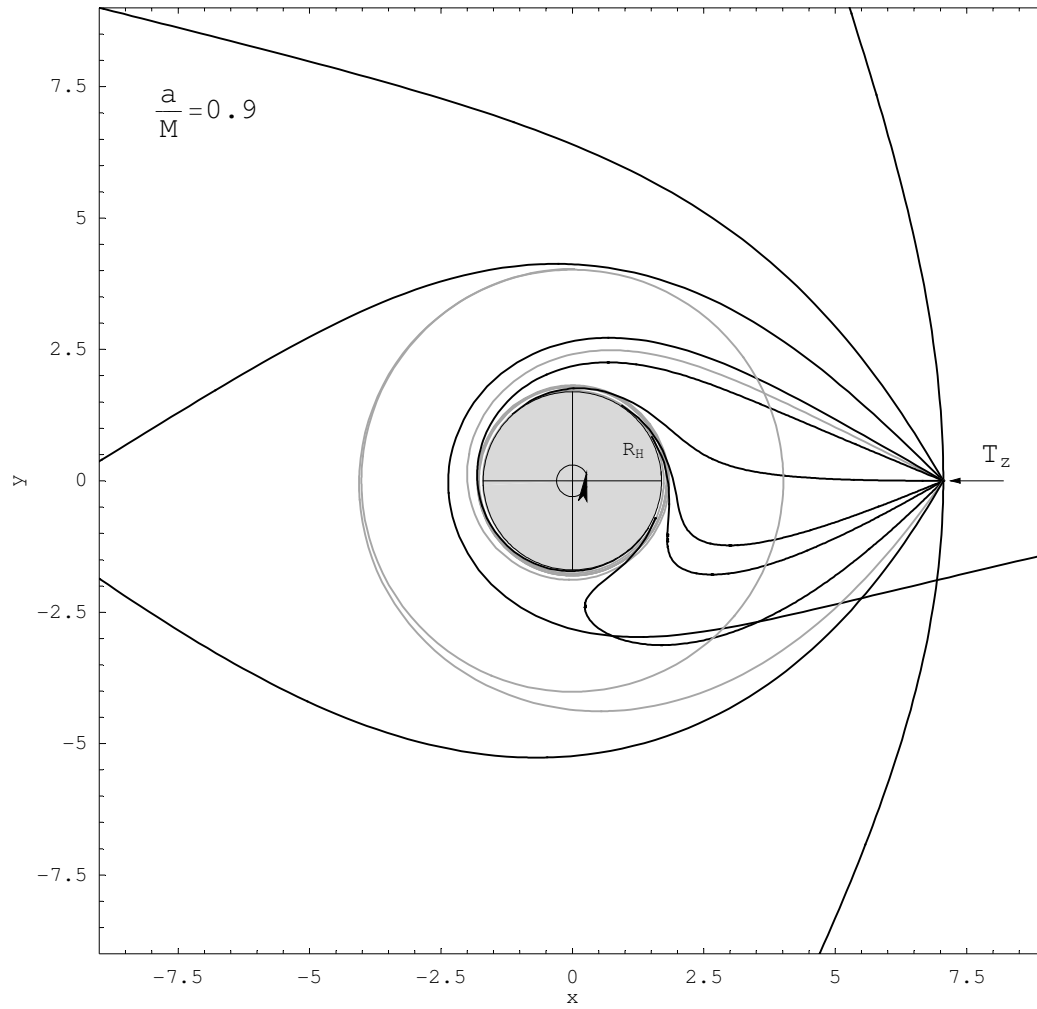
Enačba geodetke predstavlja sistem štirih parcialnih diferencialnih enačb, ki pa ni analitično rešljiv. Geodetke sem zato računala numerično s pomočjo programa *Mathematica* in funkcijo *NDSolve*.

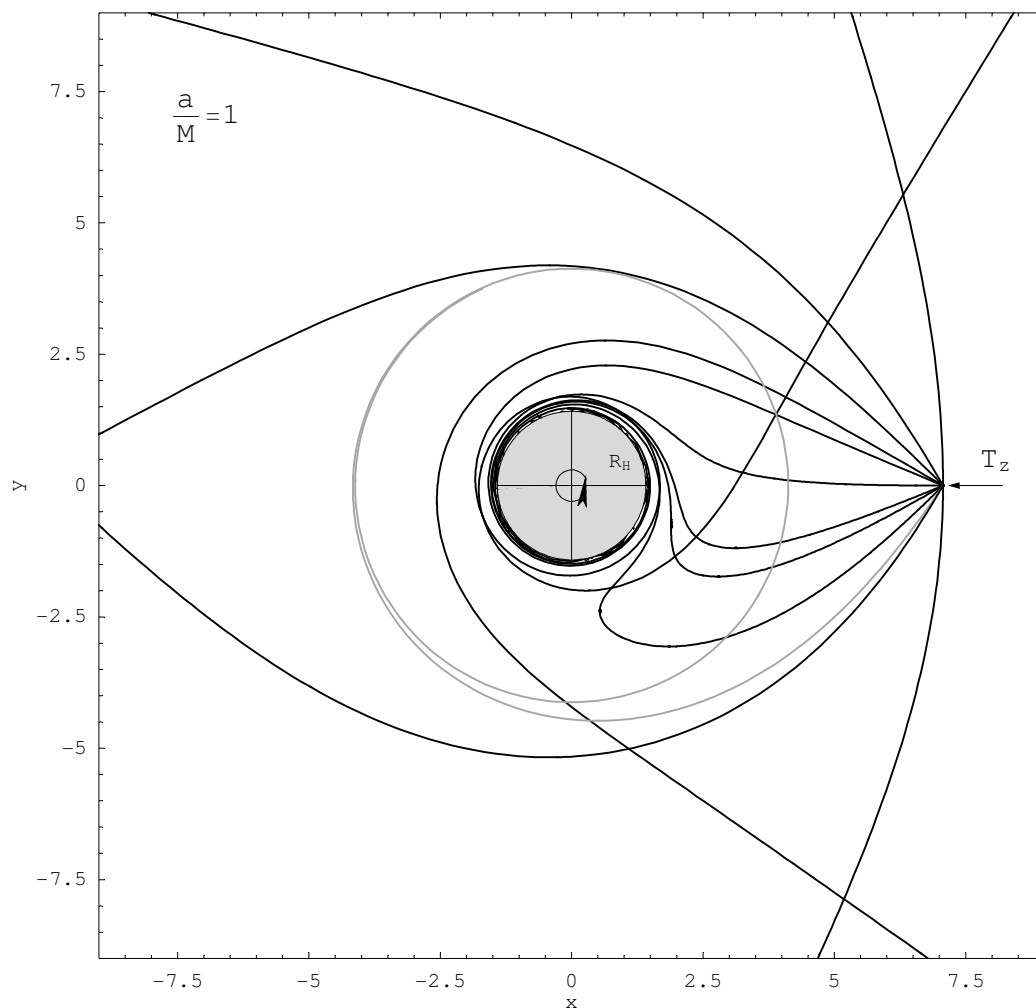
Računala sem le geodetke v ekvatorialni ravnini, saj te vseskozi ležijo v isti ravnini ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$ in $d\vartheta = 0$)

Grafi prikazujejo geodetke z različnimi vpadnimi koti pri vrednostih parametra $\frac{a}{M} = 0, 0.5, 0.9, 1$:



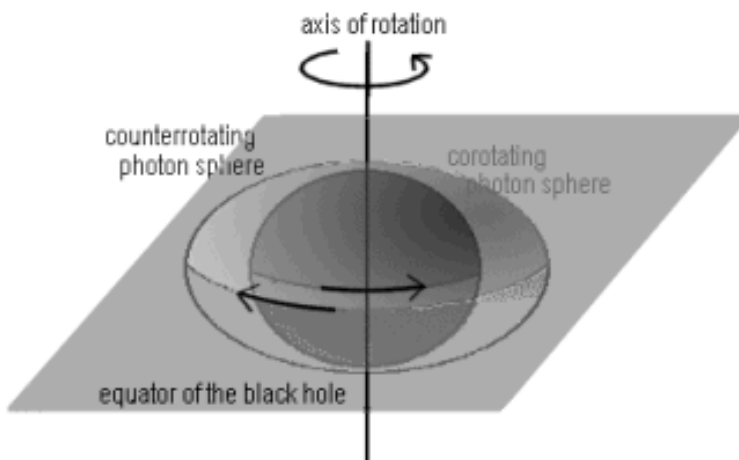






Pri vseh grafih sem uporabila iste vhodne parametre smeri žarkov. Na grafih so označeni še horizont dogodkov, začetna točka žarkov in smer vrtenja črne luknje. S sivo barvo je narisana geodetka svetlobe, ki se ujame v fotonsko sfero. V Schwarzschildovem primeru ($\frac{a}{M}=0$) vidimo simetrijo pri vpadnih žarkih svetlobe, ko pa večamo parameter vrtenja, vse bolj opazimo efekt rotirajočega se prostora-časa. Prav tako vidimo, da je v Schwarzschildovem primeru fotonska sfera le ena, nato pa se pojavita dve. Pri $\frac{a}{M}=1$ notranja fotonska sfera ravno sovpada z zunanjim horizontom dogodkov. Orbite na fotonskih sferah so nestabilne, zato je numerično računanje z njimi zelo težavno - že samo sprememba koraka pri računanju vpliva na to, ali se bo žarek ujel v to orbito. Poglejmo si še njihov izračun.

■ Fotonski sferi



Vrteča se črna luknja ima dve fotonski sferi. Na notranji sferi fotoni krožijo v smeri vrtenja črne luknje, na zunanji pa v obratni smeri. Za fotone, ki krožijo na eni izmed fotonskih sfer veljajo pogoji $r = \text{konst.}$ ($r' = 0$, $r'' = 0$), ker pa bomo računali orbite le v ekvatorialni ravnini, bo vseskozi tudi $\theta = \frac{\pi}{2}$. Upoštevamo še $d\varphi = \text{konst}$ in označimo $\frac{d\varphi}{dt} = \Omega$. Ko vse to zapišemo v enačbo geodetke svetlobe, lahko izrazimo Ω :

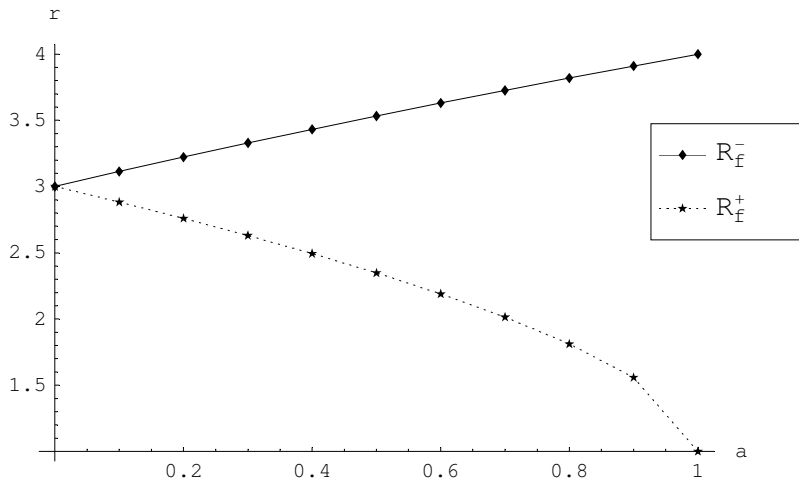
$$g_{33} \Omega^2 + 2 g_{03} \Omega + g_{00} = 0$$

$$\Omega_{1,2} = \frac{2 a M \pm r \sqrt{a^2 + r (r - 2 M)}}{r^3 + a^2 (2 M + r)}$$

To vstavimo v sistem diferencialnih enačb za geodetko svetlobe, od katerih ob upoštevanju vseh pogojev ostane le ena:

$$\frac{(M (a \Omega - 1)^2 - \Omega^2 r^3) (a^2 + r (r - 2 M))}{\Omega} = 0$$

Od tod izračunamo polmera, kjer se nahajata fotonski sferi. Graf prikazuje polmera fotonskih sfer v ekvatorialni ravnini v odvisnosti od parametra vrtenja a (R_f^+ je radij notranje, R_f^- pa radij zunanje sfere):



V Schwarzschildovem primeru imamo le eno fotonsko sfero ($R=3M$), ko pa se črne luknja začne vrteti, se pojavita dve fotonski sferi, katerih medsebojna razdalja se povečuje, ko večamo parameter vrtenja. V skrajnem primeru za $a=1$ dobimo $R_f^+=M$ in $R_f^-=4M$.

Poglejmo si še nekaj podatkov, ki so pomembni pri gornjih grafih geodetk (R_H^- je zunanji horizont dogodkov):

$\frac{a}{M}$	R_H^-	R_f^-	R_f^+
0	2 M	3 M	3 M
0.5	1.866 M	3.532 M	2.347 M
0.9	1.436 M	3.910 M	1.558 M
1	M	4 M	M

■ Viri

-Schwarzschildova rešitev enačb splošne teorije relativnosti (24.9.2006):

http://chaos.fiz.uni-lj.si/~horvat/relativity/borisV_teorija_grup.pdf

-Enačbe polja v splošni teoriji relativnosti (24.9.2006):

http://chaos.fiz.uni-lj.si/~horvat/relativity/martinH_Sem.pdf

-Inside a black hole (24.9.2006): http://nrumiano.free.fr/Estars/int_bh2.html

-Null Geodesics Around a Kerr Black Hole (24.9.2006):

<http://www.astro.ku.dk/~milvang/RelViz/index.html>

-Geometry Arond Black Holes (24.9.2006):

http://www.astro.ku.dk/~cramer/RelViz/text/geom_web/node1.html

-Einstein field equations (24.9.2006):

<http://scienceworld.wolfram.com/physics/EinsteinFieldEquations.html>