Projekt iz Teorije Gravitacije

Milan Grkovski

oktober 2008

naloga

Zelo razvita civilizacija ima na razpolago velike količine antimaterije, ki jo uporabljajo skupaj z navadno snovjo kot gorivo v vesoljskih plovilih. Iz praktičnih razlogov se vesoljska plovila lahko pospešujejo samo s pospeškom $a = g$. Koliko goriva potrebujemo za povratno pot plovila z maso 1000t, ki traja 4 leta potnikovega časa? Kako daleč pride in koliko časa je preteklo na zemlji od izstrelitve do povratka? Do destinacije se plovilo najprej pospešuje, nato enak čas zavira in enako na poti domov.

1 uvod

Zadano nalogo so v preteklosti razumeli kot paradoks: poimenovanje ni upravičeno, pojavilo pa se je zaradi tega, ker se je zmotno predpostavljalo, da posebna teorija relativnosti (ali, bolje rečeno, formalizem STR, saj je navsezadnje le ena teorija relativnosti) navaja k misli, da je zaradi principa ekvivalence vseeno, kdo je 'pri miru'. Pri miru bi lahko bila ali Zemlja ali ladja, medtem ko se drug objekt premika. Ta trditev je napačna.

Vzrok za zmotno mišljenje so inercialni sistemi, ki so nekaj posebnega. Vzemimo sledeč primer: v trenutku, ko prva ladja, ki potuje s konstantno hitrostjo, prileti mimo Zemlje, se uskladita atomski uri na Zemlji in ladji. Enak postopek ponovimo za drugo ladjo, ki prileti mimo prve, z enako hitrostjo v nasprotni smeri - tako se izognemo pospeškom. Povdariti je treba, da niso *vsi* sistemi ekvivalentni, ampak le *inercialni*. Tukaj nimamo le dveh inercialnih sistemov, ampak tri. Ti so:

1. Zemlja
2. ladja, ki se giblje stran od Zemlje
3. ladja, ki se giblje nazaj k Zemlji

Če rečemo, da Zemlja 'ostane pri miru', medtem ko ladja odpotuje, dobimo kot rezultat, da je na ladji minilo manj časa. Če zahtevamo, da ladja miruje in se Zemlja giblje stran od nje, dobimo pravtako asimetrijo, ker ladja vmes preide iz enege inercialnega sistema v drugega. Če dovolimo Zemlji, da 'se vrne', smo preprosto znova uporabili prejšnji primer, le zamenjali smo Zemljo in ladjo. V prvi verziji je Zemlja ostala v inercialnem sistemu in tako mora biti tudi v drugi. Dobimo iste rezultate kot prej, brez paradoksov.

Naloga zahteva, da se ladja ves čas pospešuje s pospeškom g, torej ni več v inercialnem sistemu. Pojasniti je treba, kako vpliva pospešek na celotno dogajanje. Ura bo na ladji v danem trenutku tekla enako hitro kot ura na referenčni ladji, ki ima v *tistem trenutku* enako hitrost kot naša ladja, a se ne giblje pospešeno in je torej v inercialnem sistemu. To velja za vsak trenutek. Lahko si mislimo množico ladij, ki se gibljejo vsaka z drugačno konstantno hitrostjo, od katerih je ena izmed njih enaka hitrosti naše ladje v izbranem trenutku. Pospešek v danem trenutku ne vpliva neposredno na faktor γ, ampak le posredno, ker spreminja hitrost.

2 rešitev

Ladji dodelimo 4-vektor hitrosti u^μ in 4-vektor pospeška $a^\mu = \frac{d}{d\tau'}u^\mu$, kjer je $u^\mu u_\mu = -1$ in $a^\mu a_\mu = g^2$. Upoštevamo invariantnost kvadrata 4-vektorja pospeška. Ortogonalnost 4-vektorja hitrosti in 4-vektorja pospeška nam da

$$0 = -\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{u} \tag{1}$$

Ta enačba pove, da je $a^0 = 0$ v sistemu potnika. V tem sistemu se prostorske komponente 4-vektorja pospeška reducirajo na običajno definicijo pospeška. Iz komponent 4-vektorja pospeška v mirujočem sistemu lahko izračunamo magnitudo pospeška kot

$$\mathbf{a}^2 = a^\mu a_\mu = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 \tag{2}$$

Pospešek je v x smeri, torej so $x^2 = x^3 = 0$. Enačbe gibanja postanejo

$$\frac{dt}{d\tau} = u^0 \tag{3}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = u^1 \tag{4}$$

$$\frac{du^0}{d\tau} = a^0 \tag{5}$$

$$\frac{du^1}{d\tau} = a^1 \tag{6}$$

Zapišimo še 3 algebraične enačbe:

$$u^{\mu}u_{\mu} = -1 \tag{7}$$

$$u^{\mu}a_{\mu} = -u^0a^0 + u^1a^1 = 0 \tag{8}$$

$$a^{\mu}a_{\mu} = g^2 \tag{9}$$

Dobimo torej

$$a^0 = \frac{du^0}{d\tau} = gu^1 \tag{10}$$

$$a^1 = \frac{du^1}{d\tau} = gu^0 \tag{11}$$

te linearne diferencialne enačbe seveda lahko rešimo takoj. Vodijo nas do rezultata

$$z = g^{-1}cosh(g\tau') \tag{12}$$

$$t = g^{-1}sinh(g\tau') \tag{13}$$

Lastni čas v teh enačbah je čas ure na ladji. Pričujoč problem zaradi večje jasnosti lahko razdelimo na 4 sektorje, ki trajajo enako časa (za opazovalca na ladji). V prvem sektorju ladja potuje s konstantnim popeškom stran od zemlje, v drugem sektorju konstantno zavira z istim pospeškom. Tretji sektor je konstantno pospeševanje nazaj, medtem ko v četrtem sektorju konstantno zavira, dokler ne pride na cilj. Če združimo 4 sektorje, se zgornji enačbi spremenita v

$$z_{max} = g^{-1}cosh\left(\frac{g\tau'}{4}\right) \tag{14}$$

in

$$t = 4g^{-1}sinh\left(\frac{g\tau'}{4}\right) \tag{15}$$

ne smemo pozabiti, da velja $c = 1$ in $a^{\mu}a_{\mu} = g^2$. Kot rezultat dobimo, da je na Zemlji minilo **4.749** leta, maksimalna razdalja, ki jo doseže ladja, pa znaša **1.128** svetlobnega leta.

2.1 preizkus

Naredimo preizkus za zgornjo trditev. Za izračun bom uporabil formulo, ki nam poda skupen lastni čas kot integral po koordinatnem času:

$$\Delta\tau = \int \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2} dt \tag{16}$$

kjer je $v(t)$ hitrost ure na ladji kot funkcija časa t, merjenega z Zemlje. 4 faze potovanja lahko opišemo z eno enačbo:

$$\left(\frac{c}{g}\right) arcsinh\left(\frac{gA}{c}\right) \tag{17}$$

kjer je g lasten pospešek, ki ga čuti ladja, A pa čas, v katerem pospešuje. Drži relacija

$$v = \frac{gA}{\sqrt{1 + \frac{gA}{c}^2}} \tag{18}$$

Ura na Zemlji bo pokazala $\Delta t = 4A = 4.749$ leta. Iz tega dobimo A, ki ga vstavimo v enačbo za skupno spremembo lastnega časa. Dobimo

$$\Delta\tau = \frac{4c}{g} arcsinh\left(\frac{gA}{c}\right) \tag{19}$$

in $\Delta\tau = 4$ leta.

3 masa goriva

Potrebno je še izračunati, koliko goriva porebuje ladja za svojo pot. Prednost goriva, ki ga sestavljata materija in antimaterija, je v njegovem izkoristku. Če se pri jedrskih reakcijah sprosti približno 0.7 odstotka mase v energijo, je ta delež v našem idealiziranem primeru 100-odstoten. Uporabil bom hiperbolični trigonometrični funkciji $sh(x)$ in $ch(x)$. Enačbe za ladjo, ki se pospešuje s pospeškom g, so:

$$t = \frac{c}{g} sh\left(\frac{g\tau}{c}\right) = \sqrt{\left(\frac{D}{c}\right)^2 + \frac{2D}{g}} \tag{20}$$

$$D = \left(\frac{c^2}{g}\right)\left(ch\left(\frac{g\tau}{c}\right) - 1\right) = \left(\frac{c^2}{g}\right)\left(\sqrt{\left(1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2\right)} - 1\right) \tag{21}$$

$$\tau = \left(\frac{c}{g}\right) sh^{-1}\left(\frac{gt}{c}\right) = \left(\frac{c}{g}\right) ch^{-1}\left(\frac{Dg}{c^2} + 1\right) \tag{22}$$

$$v = c \cdot th\left(\frac{g\tau}{c}\right) = \frac{gt}{\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}} \tag{23}$$

$$\gamma = ch\left(\frac{g\tau}{c}\right) = \frac{gt}{\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}} = \frac{Dg}{c^2} + 1 \tag{24}$$

Za izračun mase goriva moramo upoštevati še zakona o ohranitvi energije in gibalne količine. Na začetku ima ladja skupaj s tovorom energijo

$$E_0 = (M+m)c^2 \tag{25}$$

(m je masa ladje in M masa goriva). Na koncu pa velja

$$E = \gamma mc^2 + E_f. \tag{26}$$

Podobno zapišemo še za gibalno količino. Na začetku velja

$$p_0 = 0, \tag{27}$$

na koncu pa

$$p = \gamma mv - \frac{E_f}{c}. \tag{28}$$

Vidimo torej, da je

$$(M+m)c^2 = \gamma mc^2 + E_f \tag{29}$$

in

$$0 = \gamma mvc - E_f \tag{30}$$

Enačbo (30) vsatvimo v enačbo (29) in dobimo

$$M = m\left(\gamma\left(1+\frac{v}{c}\right) - 1\right) \tag{31}$$

Ta enačba velja ne glede na to, kako ladja pospešuje do hitrosti v. če pa predpostavimo konstanten pospešek $a = g$, dobimo

$$\begin{aligned} M &= m\left(-1+\gamma\left(1+\frac{v}{c}\right)\right) && (32)\\ &= m\left(ch\left(\frac{g\tau}{c}\right)\left(1+th\left(\frac{g\tau}{c}\right)\right) - 1\right) && (33)\\ &= m\left(e^{\frac{g\tau}{c}} - 1\right) && (34) \end{aligned}$$

Seveda smo računali s konstantnim pospeškom. V našem primeru pa gre za krožno pot, zato pospešek spremeni smer (in je v zgornjih enačbah povsod pozitiven), rezultat pa pride enak kot zgoraj, z razliko, da je lastni čas na ladji približno 2x daljši.

c, g, D, m in τ poznamo. Sedaj le še vstavimo podatke v zgornjo enačbo in dobimo **M=6184t**.

Literatura

[1] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler, *Gravitation.* W. H. Freeman, 1973.

[2] Richard C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology.* Dover Publications, 1987.

[3] Gerard 't Hooft, *Lectures on general relativity.* Self-published, 2004.