Astrofizika

Model zvezd s spodnjega dela glavne veje

Miha Škerget
Fakulteta za matematiko in fiziko

27. avgust 2010

1 Uvod

Naloga je narediti model zvezde iz spodnjega dela glavne veje(Zero Age Main Sequence). Za te zvezde je značilno, da je jedro zvezde v sevalnem ravnovesju, v ovojnici pa poteka konvekcija. Izpeljati je potrebno brezdimenzijske enačbe zvezdne strukture, pri čemer se upošteva Kramersov zakon za absorbcijo in potenčno odvisnost proizvodnje jedrske energije od temperature.
Najprej si poglejmo enačbe sferno simetrične zvezde v stacionarne stanju[1]:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (1)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{Gm}{r^2}, \quad (2)$$

$$\frac{dl}{dr} = 4\pi r^2 \rho\, \varepsilon, \quad (3)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4\pi\sigma}\frac{\kappa l}{r^2 T^3} \quad \text{(sevanje)}, \quad (4)$$

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{P}\frac{dP}{dr} \quad \text{(konvekcija)}. \quad (5)$$

Enačbi (1) in (2) opisujeta hidrostatsko ravnovesje kjer so m, r, P, ϱ oznake za maso, radij, tlak in gostoto, ter G za gravitacijsko konstanto. Enačba (3) opisuje proizvodnjo energije, kjer je l izsev, ε pa predstavlja moč proizvedeno z jedrskimi reakcijami. Prenos energije opisujeta enačbi (4) in (5), prva velja za prenos energije s sevanjem, druga pa za konvekcijo. V zadnjih dveh enačbah predstavljajo σ Stefanovo konstanto, κ absorbcijski koeficient in γ adiabatni eksponent.

Plin v zvezdi je skoraj popolnoma ioniziran in ga lahko, zaradi visokih temperatur navkljub visokim gostotam, opišemo kot idealen plin. Enačba stanja je potem:

$$P = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \varrho T, \tag{6}$$

kjer je μ povprečna molska masa in $\mathcal{R}$ splošna plinska konstanta.

Snov v zvezdi na različne načine absorbira energijo. V našem zvezdnem modelu privzamemo Kramersov zakon za absorbcijski koeficient κ, ki ga zapišemo takole:

$$\kappa = \kappa_0 \varrho T^{3.5}, \tag{7}$$

tu je κ_0 konstanta odvisna od lastnosti snovi.

Zvezde s spodnjega dela glavne veje imajo maso primerljivo Soncu ali nižjo. V jedrih teh zvezd so temperature relativno nizke. Gorenje vodika v teh zvezdah poteka po proton-proton(p-p) ciklu. Privzamemo potenčno odvisnost proizvodnje jedrske energije od temperature:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varrho T^{\nu} \tag{8}$$

Kot že rečeno je za zvezde spodnjega dela glavne veje značilno sevalno jedro in konvekcijska ovojnica. Zato je naš model tudi sestavljen iz dveh delov, ki se združita v primerni točki.

2 Sevalno jedro

Za numerične izračune potrebujemo delno predelati enačbe zvezdne strukture. Spremenljivke r, m, p, t in l zamenjamo z prirejenimi Schwarzschildovimi brezdimenzijskimi spremenljivkami x^* za radij, q^* za maso, p^* za tlak, t^* za temperaturo in f^* za izsev z naslednjimi transformacijami[1]:

$$\begin{gathered} r = x^* x_0 R, \quad m = q^* q_0 M, \quad l = f^* f_0 L \\ P = p^* \frac{p_0 G M^2}{4\pi R^4}, \quad T = t^* \frac{\mu}{\mathcal{R}} \frac{t_0 G M}{R}. \end{gathered} \tag{9}$$

R, M in L so celoten radij, masa in izsev zvezde, količine s podpisano nič pa so proste konstante med katerimi veljajo naslednje zveze:

$$\frac{q_0}{t_0 x_0} = 1, \quad \frac{p_0 x_0^3}{t_0 q_0} = 1, \quad \frac{t_0^{9.5} x_0}{p_0^2 f_0} = C, \quad \frac{f_0}{p_0^2 t_0^{\nu-2} x_0^3} = D, \quad t_0 = t_c. \tag{10}$$

Konstanti C in D sta pravzaprav bistveni konstanti problema, saj sta direktno povezavi s fizikalnimi količinami zvezde.

$$C = \left[\frac{3}{4\pi\sigma} \left(\frac{\mathcal{R}}{G} \right)^{7.5} \right] \left[\frac{\kappa_0}{\mu^{7.5}} \right] \frac{L R^{0.5}}{M^{5.5}} \tag{11}$$

$$D = \left[\frac{1}{4\pi} \left(\frac{G}{\mathcal{R}} \right)^{\nu} \right] \left[\varepsilon_0 \mu^{\nu} \right] \frac{M^{\nu+2}}{L R^{\nu+3}} \tag{12}$$

Skratka, po uporabi transformacij (9) na enačbah zvezdne strukture(1-4) in upoštevanju predpostavk(6-8) dobimo skupino diferencialnih enačb:

$$\frac{dp^*}{dx^*} = -\frac{p^*}{t^*}\frac{q^*}{x^{*2}}, \tag{13}$$

$$\frac{dq^*}{dx^*} = \frac{p^*}{t^*}x^{*2}, \tag{14}$$

$$\frac{dt^*}{dx^*} = -\frac{p^{*2}}{t^{*8.5}}\frac{f^*}{x^{*2}}, \tag{15}$$

$$\frac{df^*}{dx^*} = p^{*2}t^{*(\nu-2)}x^{*2}. \tag{16}$$

Začetni pogoji v središču so

$$\text{pri } x^* = 0: \quad q^* = 0, \quad f^* = 0, \quad t^* = 1 \text{ in } p^* = p_c^*. \tag{17}$$

Dobili smo set diferencialnih enačb z začetnimi pogoji kjer je nedoločena samo ena začetna vrednost p_c^*. Ta transformacija nam zelo olajša nadaljnjo delo, saj so sedaj izračuni jedra odvisni le od enega parametra.

Ob teh začetnih pogojih sta enačbi (13) in (15) singularni. To singularnost obidemo z razvojem enačb (13-16) v sredušču in upoštevanjem robnih pogojev (17). Dobimo funkcije q^*, p^*, f^*, t^* v odvisnosti od x^* in p_c^* v okolici središča. Vrednosti funkcij lahko izračunamo za neko točko blizu središča(npr. $x^* = 0.01$) in nato računamo od tam naprej.

Enačbe so nestabilne tudi na zgorjnem koncu, zato je potrebno za vsak začetni pogoj prilagoditi zgornjo mejo integracije. Rešitev za sevalni prenos energije je dobra le dokler ne prevlada konvekcija. Ta pogoj je, da je sevalni temperaturni gradient manjši kot adiabatski temperaturni gradient. Z izrazom $(n+1) = +\frac{T}{P}\frac{dP}{dT}$ poiščemo mejno točko veljavnosti sevalnega modela. Enačba prikazuje relacijo med tlakom in temperaturo v zvezdi kjer je n politropni indeks(več o tem malo kasneje). S tem se konča sevalni del zvezde in začne konvekcijski.

3 Konvekcijska ovojnica

Predpostavimo, da v ovojnici jedrske reakcije ne potekajo, kar nam zelo poenostavi enačbe zvezdne strukture. Konvekcijo obravnavamo s politropnim modelom, ki privzame, da obstaja preprosta relacija med P in ϱ oziroma med P in T [2]:

$$P = K\varrho^{1+\frac{1}{n}}, \qquad P = K'T^{n+1}, \tag{18}$$

kjer sta K in K' različni politropni konstanti in n politropni indeks. Iz teorije o politropah sledi, da je za naš primer uporaben politropen model z indeksom $n = 1.5$. Za brezdimenzijsko obravnavo problema uvedemo Schwarzschildove brezdimenzijske spremenljivke x, q, p ter t:

$$r = xR, \quad m = qM, \quad P = p\frac{GM^2}{4\pi R^4}, \quad T = t\frac{\mu}{\mathcal{R}}\frac{GM}{R}. \tag{19}$$

S tem korakom dobimo enačbe, ki jih potrebujemo za konvekcijsko ovojnico:

$$\frac{dq}{dx} = \frac{px^2}{t}, \tag{20}$$
$$\frac{dp}{dx} = -\frac{pq}{tx^2}, \tag{21}$$
$$p = Et^{2.5}. \tag{22}$$

Enačbi (20) in (21) opisujeta hidrostatsko ravnovesje, enačba (22) pa podaja politropno zvezo. E je brezdimenzijska konstanta, ki je analogna politropni konstanti K' in je podana z:

$$E = 4\pi\left(\frac{\mu}{\mathcal{R}}\right)^{2.5} G^{1.5}K'M^{0.5}R^{1.5}. \tag{23}$$

Konstanta E je prosti parameter in naša konvekcijska ovojnica je odvisna le od tega enega parametra.

4 Združevanje jedra in ovojnice

Pri združevanju jedra in ovojnice moramo biti pazljivi, saj imamo dve različni enoti za radij, x^* in x. Uvedemo dve novi količini, ki sta invariantni na transformaciji (9) in (19)[3]:

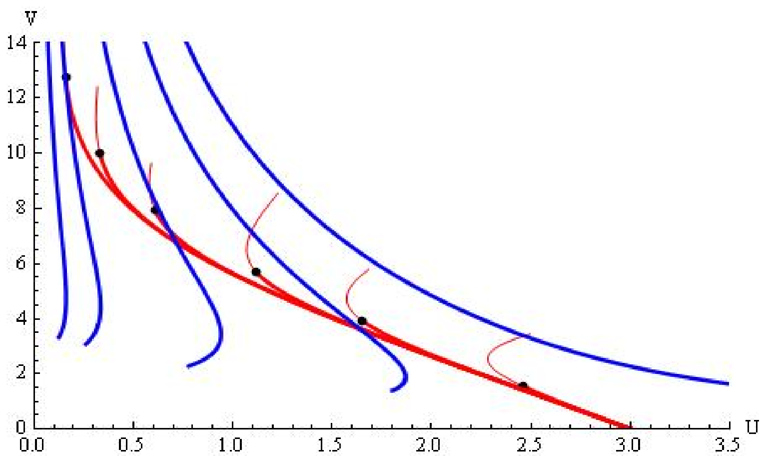
$$U = \frac{d\ln(m)}{d\ln(r)}, \qquad V = -\frac{d\ln(P)}{d\ln(r)} \tag{24}$$

Za jedro in za ovojnico nato dobimo:

$$\begin{aligned} U &= +\frac{x^*}{q^*}\frac{dq^*}{dx^*} = +\frac{p^*x^{*3}}{t^*q^*}, \quad V = -\frac{x^*}{p^*}\frac{dp^*}{dx^*} = -\frac{q^*}{t^*x^*}, \\ U &= +\frac{x}{q}\frac{dq}{dx} = +\frac{px^3}{tq}, \qquad V = -\frac{x}{p}\frac{dp}{dx} = -\frac{q}{tx}. \end{aligned} \tag{25}$$

Iz teh enačb lahko izračunamo U in V v vsaki točki zvezde. Potrebno je torej izračunati U in V za jedro in za ovojnico ter najti prave vrednosti parametrov, da bo prehod zvezen($U_{je} = U_{ov}, V_{je} = V_{ov}$). Rezultate lahko predstavimo v UV ravnini. Lastnost UV ravnine je, da je središče zvezde $r = 0$ v točki $U = 3, V = 0$, na površju $r = R$ pa gre proti $U = 0, V = \infty$.

Slika 1 prikazuje z rdečo barvo rešitve sevalnega jedra z različnimi p_c^*, ki se zaključijo s črno piko. Tam zvezda preide v konvekcijo. Modre krivulje so rešitve konvekcijske ovojnice za različne vrednosti parametra E.



Slika 1: Rešitve sevalnega jedra(rdeča) in konvekcijske ovojnice(modra). Črna pika pomeni mejo sevalnega jedra, tanka rdeča črta je nadaljevanje integracije. Od leve proti desni so rešitve jedra z $p_c^* = 0.71999655$, 0.7199967, 0.719999, 0.72005, 0.7205, 0.727 in rešitve ovojnice z $E = 5, 10, 25, 40, 55$.

Z združitvijo sevalnega jedra in konvekcijske ovojnice dokončno določimo konstante C, D in E, ki jih lahko povežemo s fizikalnimi količinami. Iz enačb (11) in (12) lahko izpostavimo izsev L in dobimo dve enačbi:

$$L = C\left[\frac{4\pi\sigma}{3}\left(\frac{G}{\mathcal{R}}\right)^{7.5}\right]\left[\frac{\mu^{7.5}}{\kappa_0}\right]\frac{M^{5.5}}{R^{0.5}} \tag{26}$$

$$L = \frac{1}{D}\left[\frac{1}{4\pi}\left(\frac{G}{\mathcal{R}}\right)^{\nu}\right]\left[\varepsilon_0\mu^{\nu}\right]\frac{M^{\nu+2}}{R^{\nu+3}}. \tag{27}$$

Prva enačba nam pove kako se energija prenaša po zvezdi, druga pa nam pove kako se energija proizvaja v zvezdi. Oba izseva sta enaka saj je zvezda v termalnem ravnovesju. Iz teh dveh enačb dobimo zvezo med radijem in maso zvezde. To zvezo nam podaja še enačba (23). Iz teh zvez lahko sedaj izračunamo končne vrednosti L,M,R.

5 Rezultati

Poglejmo si sedaj lastnosti treh modelov zvezd, ki so predstavljeni v tabeli 1. Najprej si na podlagi p-p cikla jedrskih reakcij izberemo potenčni faktor proizvodnje jedrske energije $\nu = 4.5$, kar nam da tudi konstanto ε_0. Nato izberemo začetni tlak v jedru p_c^*, dobimo točko združevanja jedra in ovojnice x_f, z iteracijo določimo konstanto E in doočimo konstanti C in D.

Na tem mestu imamo vse numerične vrednosti, ki so potrebne za pretvorbo brezdimenzijskih količin v dimenzijske.

	Model 1	Model 2	Model 3
p_c^*	0.71999655	0.719999	0.72005
x_f	0.806	0.705	0.629
E	10.1317923	24.2007306	34.6742265
C	1.03957×10^{-6}	1.03344×10^{-6}	1.15807×10^{-6}
D	0.639724	2.05128	4.19157
K'	0.0017	0.006	0.0111
M[kg]	3.16×10^{30}	2.59×10^{30}	2.32×10^{30}
R[m]	9.84×10^{8}	8.11×10^{8}	7.09×10^{8}
L[W]	8.06×10^{26}	2.96×10^{26}	1.94×10^{26}
T_c[K]	18.52×10^{6}	15.81×10^{6}	14.80×10^{6}
T_{eff}[K]	5846	5013	4826

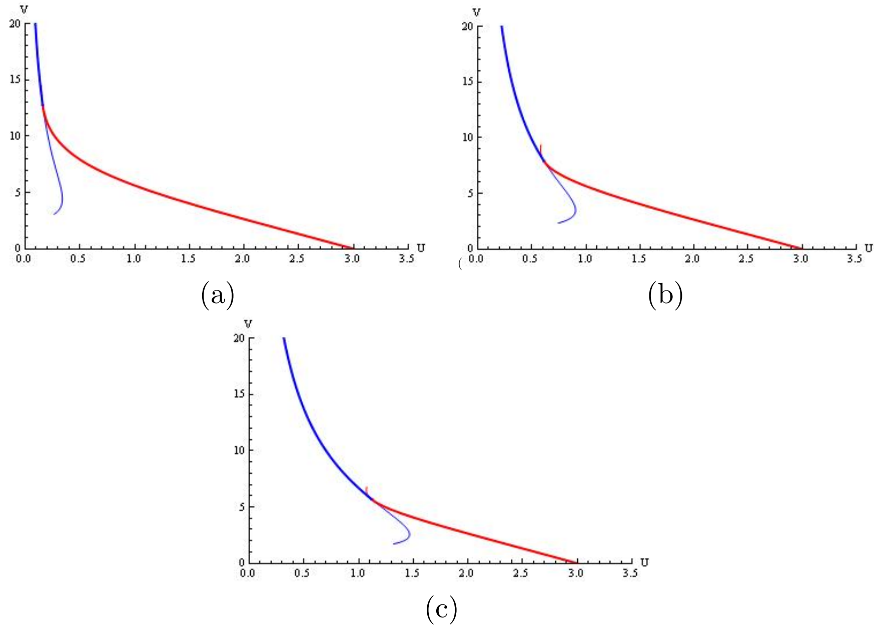
Tabela 1: Primerjava treh modelov zvezd z začetnimi vrednostmi in dimenzijskimi izračuni. Model 1 je največja zvezda z najvišjo površinsko temperaturo.

Dimenzijski podatki za maso M, radij R, izsev L, središčna temperaturo T_c in površinsko temperaturo T_{eff} so prikazani v tabeli 1. Površinsko temperaturo sem izračunal iz $L = 4\pi\sigma R^2 T_{eff}^4$ in dobljenih rezultatov za L in R.

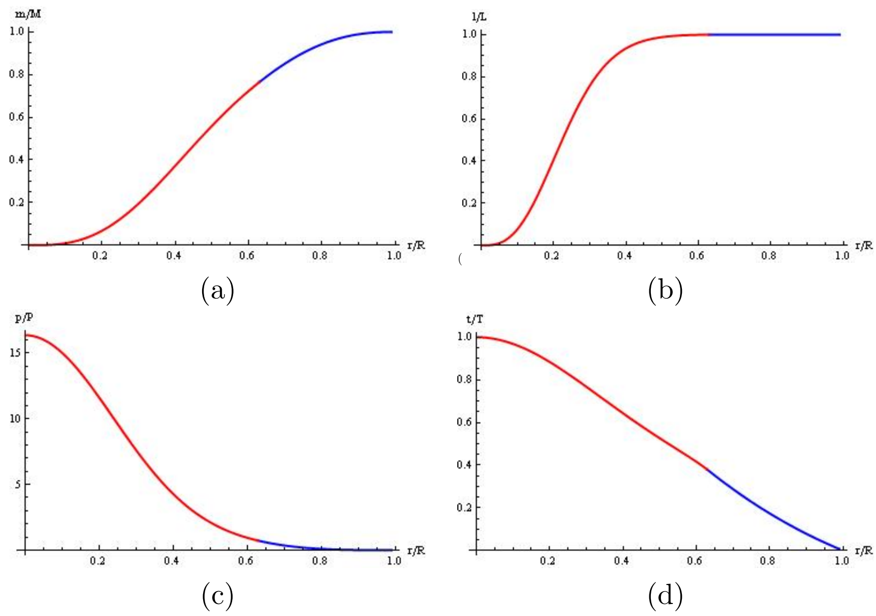
Iz modela 1 v model 2 in nato v model 3 smo s spreminjanjem vrednosti p_c^* spreminjali pravzaprav tudi točko združevanja x_f, ki se iz modela 1 do modela 3 premakne globje v zvezdo.

Na sliki 2 so prikazane UV ravnine modelov 1(a),model 2(b) in model 3(c). Jedro je rdeče barve, ovojnica pa modre. Kot vemo je v točki $U = 3, V = 0$ center zvezde. Točka prehoda iz jedra v ovojnico v UV ravnini ne predstavlja dobro kolikšen delež zvezde je sevalni in kolikšen konvekcijski. To nam bolje predstavlja radialna koordinata prehoda x_f.

Na sliki 3 so prikazani normalizirani profili zvezde modela 3 za masno porazdelitev(a), izsev(b), tlak(c) in temperaturo(d). Prikazan je model 3, ker je točka prehoda jedra v ovojnico v tem modelu najglobje in so tako prikazani grafi najbolj nazorni. Sevalni del je predstavljen z rdečo barvo, konvekcijski pa z modro.



Slika 2: Združevanje jedra(rdeča) in ovojnice(modra) v UV ravnini za model 1(a), model 2(b) in model 3(c).



Slika 3: Na sliki so predstavljeni radialni profili modela 3 za maso(a), izsev(b), tlak(c) in temperaturo(d). Rdeča barva predstavlja jedro, modra pa ovojnico.

6 Zaključek

Prišli smo do modela zvezde s spodnjega dela glavne veje. Ti trije predstavljeni modeli so predstavljeni pod določenimi predpostavkami, ki smo jih opisali v prejšnjih poglavjih. Pri samem sestavljanju modela moramo biti pazljivi na več stvari. Kot že rečeno je potrebno najprej določiti potenčni faktor proizvodnje energije ν. Ob mali spremembi tega faktorja je potrebno model popolnoma spremeniti. To prav tako velja za začetno vrednost p_c^*, ki pa nam nato posredno določa tudi konstante E, C in D.

Literatura

[1] M. Schwarzschild, *Structure and Evolution of the Stars* (Dover Publications, Inc., New York, 1965).

[2] J. P. Cox, *Principles of Stellar Structure, Vol. 2* (Gordon and Breach, Scienc Publishers, New Yok, 1968).

[3] R. Kippenhahn, A. Weigert *Stellar Structure and Evolution* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990).