UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO

DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ASTROFIZIKA

MODEL ROTIRAJOČE POLITROPNE ZVEZDE

Avtor: Luka Šantelj

5. september 2009

1 Izpeljava enačbe rotirajoče politropne zvezde

Enačba, ki opisuje rotirajoč plin v mehanskem ravnovesju je:

$$\nabla p = \rho \nabla \Phi + \rho \omega^2 (x, y, 0), \tag{1.1}$$

kjer je p tlak, ρ gostota, Φ gravitacijski potencial in ω kotna hitrost rotacije, pri čemer os vrtenja kaže v smeri osi z. Gravitacijski potencial zadošča Poissonovi enačbi:

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi G \rho. \tag{1.2}$$

Za lažjo obravnavo zapišemo zgornji enačbi v sferičnih koordinatah (r, ϑ, ϕ), enačbo (1.1) kot:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \rho \omega^2 r (1 - \mu^2), \quad \frac{\partial p}{\partial \mu} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} - \rho \omega^2 r \mu, \tag{1.3}$$

kjer smo vpeljali $\mu = \cos(\vartheta)$. Enačbo (1.2) pa v sferičnih koordinatah napišemo kot:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right) = -4\pi G \rho. \tag{1.4}$$

Vstavimo sedaj odvoda potenciala iz enačb (1.3) v (1.4) pa dobimo:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{(1-\mu^2)}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)=-4\pi G\rho+2\omega^2. \tag{1.5}$$

Nadalje upoštevamo, da tlak in gostoto povezuje politropska zveza ter vpeljemo novi spremenljivki Θ in ξ, ki zadoščata:

$$p=K\rho^{1+\frac{1}{n}},\qquad \rho=\lambda\Theta^n,\qquad p=\lambda^{1+\frac{1}{n}}K\Theta^{n+1},\qquad r=\left(\frac{(n+1)K}{4\pi G}\lambda^{\frac{1}{n}-1}\right)^{\frac{1}{2}}\xi. \tag{1.6}$$

Z uporabo zgornjega preide enačba (1.5) v

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^2\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right)+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial \Theta}{\partial \mu}\right)=-\Theta^n+v, \tag{1.7}$$

kjer smo definirali še $v=\frac{\omega^2}{2\pi G\lambda}$. V primeru nerotirajočega plina, ko je $\omega=0$ in s tem tudi $v=0$, je zgornja enačba kar običajna Lane-Emdenova enačba. Njene rešitve so namreč sferno simetrične, s čimer odpade člen z odvodom po μ. Označimo te sferno simetrične rešitve Lane-Emdenove enačbe z θ. Rešitev enačbe rotirajočega plina (1.7) bomo poiskali perturbativno, v prvem redu parametra v (predpostavimo $\omega^4 \ll 1$), torej predpostavimo rešitve oblike:

$$\Theta=\theta+v\Psi. \tag{1.8}$$

Vstavimo zgornji nastavek v (1.7) pa dobimo:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^2\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\right)+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial \Psi}{\partial \mu}\right)=-n\theta^{n-1}+1, \tag{1.9}$$

kjer smo upoštevali, da funkcije θ rešijo običajno Lane-Emdenovo enačbo in zanemarili člene višjih redov v v. Za funkcijo Ψ uporabimo nastavek

$$\Psi=\psi_0(\xi)+\sum_{j=1}^{\infty}A_j\psi_j(\xi)P_j(\mu), \tag{1.10}$$

kjer so $P_j(\mu)$ Legendrove funkcije, ki zadoščajo diferencialni enačbi

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial P_j}{\partial \mu}\right)+j(j+1)P_j=0. \tag{1.11}$$

Nastavek (1.10) je le običajni multipolni razvoj kotnega dela funckije Ψ. Vstavimo nastavek (1.10) v (1.9) pa z upoštevanjem (1.11) in izenačitvijo koeficientov pri P_j pridemo do:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\psi_0}{d\xi}\right)=-n\theta^{n-1}\psi_0+1\quad\text{in}\quad\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\psi_j}{d\xi}\right)=\left(\frac{j(j+1)}{\xi^2}-n\theta^{n-1}\right)\psi_j. \tag{1.12}$$

Sedaj poznamo diferencialne enačbe, ki jim morajo zadoščati ψ_j, nič pa še nismo rekli o koeficientih A_j, ki prav tako nastopajo v (1.10). Te koeficiente določata enačbi (1.3), ki jim mora dobljena rešitev zadoščati in pa robni pogoj, ki izhaja iz zahteve po zveznosti gravitacijskega potenciala na površju zvezde. Da lahko zadostimo tema pogojema moramo določiti gravitacijski potencial dobljene rešitve Ψ pri pobljubnih konstantah A_j.

Poissonovo enačbo (1.4) zapišemo s spremenljivkama ξ,μ in vstavimo $\rho = \lambda\Theta^n$, kjer Θ podaja enačba (1.8):

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right) = -(n+1)\lambda^{\frac{1}{n}}\left[\theta^n + n\theta^{n-1}v\left(\psi_0 + \sum_j A_j\psi_j P_j\right)\right] \tag{1.13}$$

Sedaj v istem smislu kot smo prej Ψ razvijemo tudi potencial Φ:

$$\Phi = \Phi_0 + v\left(\phi_0(\xi) + \sum_j \phi_j(\xi)P_j(\mu)\right), \tag{1.14}$$

kjer je Φ_0 potencial nerotirajoče zvezde. Ta nastavek vstavimo v (1.13) in izenačimo koeficiente pri vseh P_j. Enostavno je pokazati, da z uporabo (1.12) rezultirajoče enačbe napišemo kot:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\phi_0}{d\xi}\right) &= (n+1)K\lambda^{\frac{1}{n}}\left[\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d}{d\xi}(\psi_0 - \tfrac{1}{6}\xi^2)\right)\right] \qquad (1.15) \\ \frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\phi_j}{d\xi}\right) - \frac{j(j+1)}{\xi^2}\phi_j &= A_j(n+1)K\lambda^{\frac{1}{n}}\left[\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\psi_j}{d\xi}\right) - \frac{j(j+1)}{\xi^2}\psi_j\right] \end{aligned}$$

Rešitev prve enačbe je očitna $\phi_0 = (n+1)K\lambda^{\frac{1}{n}}(\psi_0 - \frac{1}{6}\xi^2) + konst.$ Tudi rešitev druge hitro najdemo, ta je $\phi_j = (n+1)K\lambda^{\frac{1}{n}}(A_j\psi_j + B_j\xi^j) + konst.$, kjer so koeficienti B_j poljubni. Potencial Φ_0 nerotirajoče zvezde dobimo iz enačbe (1.4), kjer člen z odvodom po μ odpade. Hitro vidimo, da velja $\Phi_0 = (n+1)K\lambda^{\frac{1}{n}}\theta + konst.$ Združimo vse rezultate v enačbo (1.14):

$$\Phi = (n+1)K\lambda^{\frac{1}{n}}\left[\Theta + v\left(\sum_j B_j\xi^j P_j(\mu) - \tfrac{1}{6}\xi^2\right)\right] \tag{1.16}$$

Ta rezultat sedaj vstavimo v radialno enačbo v (1.3), ki jo moramo seveda zapisati z ustreznimi spremenljivkami. Iz izenačitve koeficientov vidimo, da velja $B_2 = \frac{1}{6}$ in za vse ostale $B_j = 0$. Potencial Φ je tako enak

$$\Phi = (n+1)K\lambda^{\frac{1}{n}}(\Theta - \tfrac{1}{6}v(\xi^2 - P_2(\mu)\xi^2)) + konst. \tag{1.17}$$

Koeficiente A_j, ki se še vedno nahajajo v Θ določi zahteva po zveznosti potenciala (1.17) z zunanjim potencialom, na površju zvezde. V prvem redu perturbacije je to kar na sferi z radijem ξ_1, ki zadošča $\theta(\xi_1) = 0$. Zunanji potencial zadošča Laplaceovi enačbi $\nabla\Phi_{zun} = 0$ in ga lahko v prvem redu v zapišemo kot [1]:

$$\Phi_{zun} = (n+1)K\lambda^{\frac{1}{n}}\left[\frac{C_0}{\xi} + v\sum_j \frac{C_j}{\xi^{j+1}}P_j(\mu)\right]. \tag{1.18}$$

S primerjavo teh dveh potencialov vidimo, da zahteva po njuni zveznosti in zveznosti odvodov vodi do $C_j = A_j = 0,$ za $j \neq 2$. Pri $j = 2$ dobimo:

$$\frac{C_2}{\xi_1^3} = A_2\psi_2(\xi_1) + \tfrac{1}{6}\xi_1^2 \quad \text{in} \quad -\frac{3C_2}{\xi_1^4} = A_2\psi_2'(\xi_1) + \tfrac{1}{3}\xi_1. \tag{1.19}$$

Koeficient A_2 je torej enak:

$$A_2 = -\frac{5}{6}\frac{\xi_1^2}{3\psi_3(\xi_1) + \xi_1\psi_2'(\xi_1)} \tag{1.20}$$

in celotna rešitev rešitev našega problema

$$\Theta = \theta + v\left[\psi_0(\xi) - \frac{5}{6}\frac{\xi_1^2}{3\psi_3(\xi_1) + \xi_1\psi_2'(\xi_1)}\psi_2(\xi)P_2(\mu)\right], \tag{1.21}$$

kjer funkciji ψ_0 in ψ_2 določata diferencialni enačbi (1.12).

2 Numerično reševanje

2.1 Lane-Emdenova enačba

V diferencialnih enačbah (1.12), ki jih moramo rešiti, da dobimo ψ_0 in ψ_2 nastopa funkcija θ, ki je rešitev običajne Lane-Emdenove enačbe:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right) = -\theta^n. \tag{2.1}$$

Poleg tega v končni rešitvi (1.21) nastopa prva ničla ξ_1 rešitve zgornje enačbe. Analitične rešitve enačbe (2.1) obstajajo le v primerih z $n = 0, 1, 5$ [2], zato moramo v splošnem zgornjo enačbo reševiti numerično. Pri tem se hitro soočimo s težavo, saj je enačba (2.1) pri $\xi = 0$ singularna. Pomagamo si z razvojem rešitve okrog te točke. Vemo namreč $\theta(0) = 1$ in $\theta'(0) = 0$, višje odvode pa izračunamo iz (2.1). Tako pridemo do [1]:

$$\theta(\xi) \approx 1 - \frac{1}{3!}\xi^2 + \frac{n}{5!}\xi^4 - \frac{8n^2 - 5n}{3 \cdot 7!}\xi^6 + \ldots, \tag{2.2}$$

kar uporabimo pri numeričnem reševanju. Z (2.2) izračunamo rešitev θ in njen odvod θ' nekje v bližini izhodišča in od te točke nadaljujemo z numeričnim reševanjem. Numerično dobljene rešitve prikazuje slika 1.

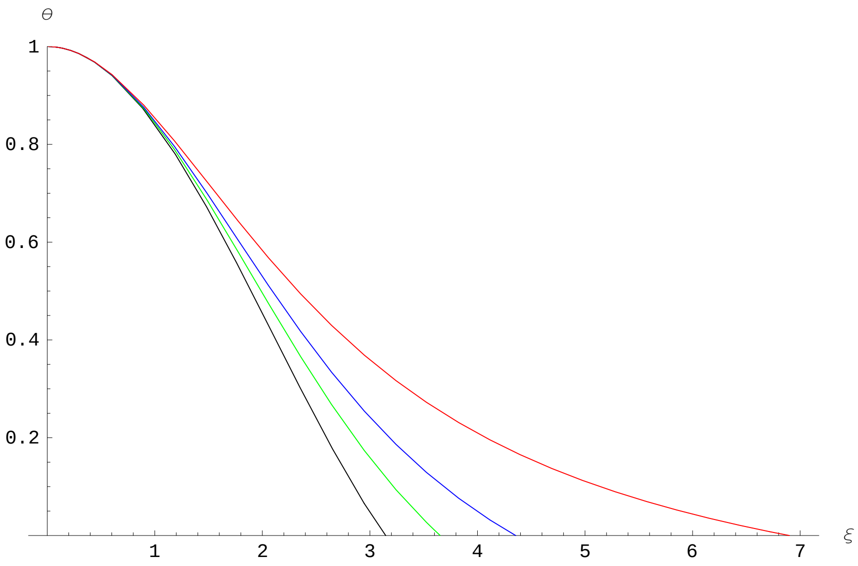
2.2 Rotacijske enačbe

Ko poznamo funkcije θ lahko začnemo z reševanjem enačb, ki definirajo ψ_0 in ψ_2 (1.12):

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\psi_0}{d\xi}\right) = -n\theta^{n-1}\psi_0 + 1 \quad \text{in} \quad \frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\psi_2}{d\xi}\right) = \left(\frac{6}{\xi^2} - n\theta^{n-1}\right)\psi_2. \tag{2.3}$$

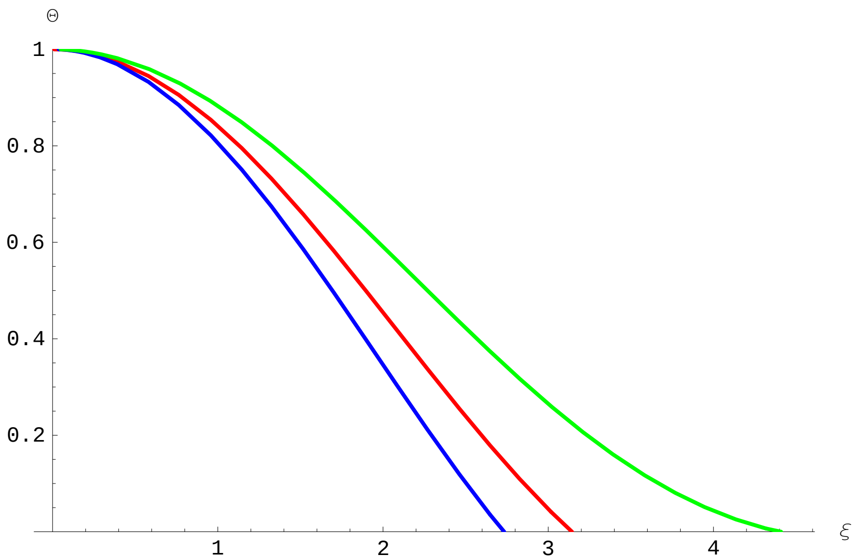
Tudi te imajo v izhodišču singularnost, kar obidemo na podoben način kot prej. Vstavimo razvoj funkcij θ (2.2) v enačbi (2.3) in tudi za funkciji $\psi_{0,2}$ predpostavimo obliko $\psi_{0,2} = a\xi^2 + b\xi^3 9 + c\xi^4 + \ldots$. Rešimo in dobimo [1]:

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \frac{1}{6}\xi^2 - \frac{n}{120}\xi^4 + \frac{n(13n-10)}{42 \cdot 360}\xi^6 + \ldots \\ \psi_2 &= \xi^2 - \frac{n}{14}\xi^4 + \frac{n(10n-7)}{42 \cdot 36}\xi^6 + \ldots\end{aligned} \tag{2.4}$$



Slika 1: Rešitve Lane-Emdenove enačbe (2.1) pri $n = 1, \frac{3}{2}, 2, 3$, v tem sosledju od leve proti desni.

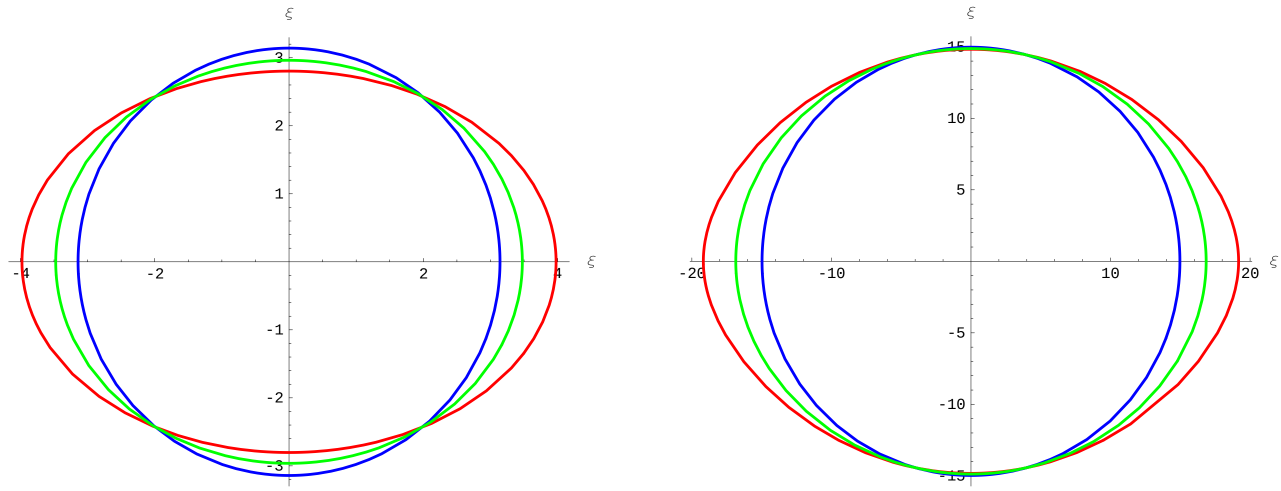
Kot prej, izvrednotimo v bližini izhodišča in od tam nadaljujemo numerično reševanje. Ko numerično izvrednotimo funkciji ψ_0 in ψ_2, izračunamo še vrednost odvoda $\psi_2'(\xi_1)$, pri prvi ničli rešitve Lane-Emdenove enačbe in vse skupaj sestavimo v rešitev Θ, kot narekuje enačba (1.21). Primer dobljene rešitve Θ in primerjavo z rešitvijo nerotirajoče zvezde prikazuje slika 2. Slika ustreza rotirajoči in nerotirajoči zvezdi z enako gostoto v središču. Rotirajoča zvezda je na polih sploščena.



Slika 2: Primerjava rešitve rotirajače in nerotirajoče politropne zvezde pri $n = 1$. Rdeča črta pripada nerotirajoči zvezdi (kar rešitev Lane-Emdenove enačbe), modra in rdeča pa zvezdi z $v = 0.1$. Rešitev rotirajoče zvezde Θ je po (1.21) očitno odvisna od kota ϑ. Modra črta na sliki ustreza rešitvi v smeri osi rotacije, rdeča pa v pravokotni smeri (v ekvatorialni ravnini). Iz položaja ničel rešitve takoj vidimo, da je zvezda sploščena.

2.3 Oblika rotirajoče zvezde

Sedaj, ko znamo poiskati rešitve rotirajoče zvezde Θ, se vprašamo po obliki take rotirajoče zvezde. Površino zvezde določa pogoj $\Theta(\xi) = 0$, saj je gostota na tej točki enaka nič. Rešitve enačbe $\Theta(\xi) = 0$, kjer je Θ dana z (1.21) poiščemo numerično. Obliko zvezde v odvisnosti od hitrosti rotacije v prikazuje slika 3. Zvezde pri manjših n so kompaktnejše in se zato lahko hitreje vrtijo. Na sliki vidimo, kako močan je vpliv že majhne rotacije na zvezde z $n = 4$. Zanimivo je opaziti tudi razliko med raztezkom na ekvatorju in skrčitvijo na polih. Pri velikih n na polih praktično ne opazimo skrčitve.



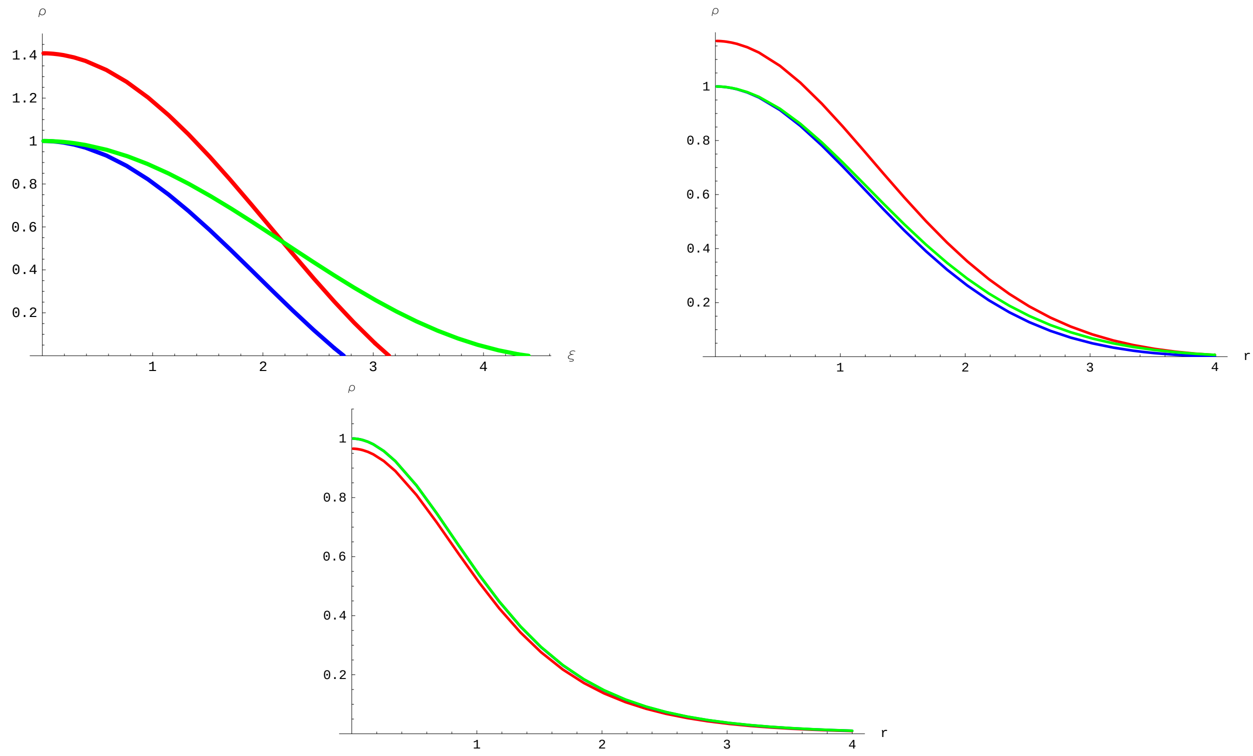
Slika 3: **Levo:** Oblika rotirajoče politropne zvezde z $n = 1$. Modra krivulja ustreza nerotirajoči zvezdi, zelena zvezdi pri $v = 0.04$ in rdeča pri $v = 0.08$. **Desno:** Oblika rotirajoče zvezde z $n = 4$. Modra krivulja ustreza $v = 0$, zelena $v = 0.0002$ in rdeča $v = 0.0003$.

2.4 Zvezde z enako maso

Pri obdelavi rotirajočih politropnih zvezd se je zanimivo vprašati še o središčni gostoti (λ) zvezd z enako maso. Primerjamo središčno gostoto nerotirajoče in enako masivne rotirajoče zvezde. Da pridemo do mase zvezde moramo izvesti integral:

$$M = 4\pi \int\int \rho r^2 dr d\mu \ \propto \ \lambda^{\frac{3-n}{2n}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\xi_1(\mu)} \xi^2 \Theta^n d\xi d\mu, \tag{2.5}$$

kjer smo upoštevali definicije (1.6). S $\xi_1(\mu)$ smo označili rob zvezde, torej prvo ničlo funkcije Θ. Zgornji integral lahko v prvem redu v v izvrednotimo analitično [1, 2], sami pa smo ga rešili numerično, kjer upoštevamo tudi nesferičnost zvezde. Ugotovimo, da imajo rotirajoče zvezde večjo maso kot nerotirajoče z enako središčno gostoto λ. Nadalje se vprašamo kakšna sprememba središčne gostote nerotirajoče zvezde je potrebna, da bo imela zvezda enako maso kot rotirajoča. Rezultat pri treh vrednostih n prikazuje slika 4. Na slikah rišemo gostoto v odvisnosti od radija r, pri čemer gostoto rotirajoče zvezde normaliziramo na 1. Ker se s spremembo središčne gostote λ spremeni tudi radialna skala, moramo risati odvisnost od r in ne od ξ, kjer zvezo med njima podaja (1.6).



Slika 4: Gostota rotirajoče in nerotirajoče zvezde z enako maso v odvisnosti od radija. Rdeča črta prikazuje gostoto nerotirajoče zvezde, zelena in modra pa rotirajoče. Zelena v smeri ekvatorja, modra pa v smeri polov. Gostota rotirajoče zvezde je normalizirana na 1. **Levo zgoraj:** primer zvezd pri $n = 1$, hitrost rotirajoče zvezde je $v = 0.1$. **Desno zgoraj:** primer pri $n = 2$ in $v = 0.01$. **Spodaj:** primer pri $n = 4$ in $v = 0.0003$.

Zanimivo je opaziti, da ima pri $n = 4$, v nasprotju z $n = 1$ in $n = 2$, rotirajoča zvezda večjo središčno gostoto kot nerotirajoča. To lahko iz enačbe (2.5) tudi pričakujemo. Enostavno je videti, da je vrednost $n = 3$ tista, ki loči med obema režimoma. Masa zvezde je namreč sorazmerna z $M \propto \lambda^{\frac{3-n}{2n}}$ in če hočemo, da imata rotirajoča in nerotirajoča zvezda enaki masi, moramo mirujoči zvezdi pri $n < 3$ povečati λ, pri $n > 3$ pa zmanjšati.

Literatura

[1] S. Chandrasekhar: Stellar Structure and Stellar Atmospheres, Selected Papers, The University of ChicagoPress, 1989.

[2] G.P. Horedt: Polytropes, Applications in Astrophysics and Related Fields, Springer Science Inc., 2004.