Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za fiziko

Domača naloga pri predmetu astrofizika

Numerično reši enačbo sferično simetričnih oscilacij zvezde za politropni model.

Avtorja: Denis Peter in Tomaž Mlakar

1 Izpeljava enačba za sferično simetrično nihanje zvezde

Za sferično lupino snovi v zvezdi velja Newtonov zakon:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi_g, \tag{1}$$

kjer so ρ, p, $\vec{v}$ in Φ_g časovno in radialno odvisni gostota, tlak, hitrost in gravitacijski potencial.

Zanimajo nas zgolj sferno simetrične oscilacije, zato v okviru linearne perturbacijske analize uporabimo nastavke:

$$\rho(r,t) = \rho_0(r)\,(1+\eta(r,t)) \tag{2}$$

$$p(r,t) = p_0(r)\,(1+\varphi(r,t)) \tag{3}$$

$$R(r,t) = r(1+\alpha(r,t)) \tag{4}$$

Pri tem smo z r označili radij sferične lupine ob času $t = 0$, z R pa radij taiste lupine ob času t.

Če upoštevamo nastavek za $R(r,t)$, lahko količine v Newtonovem zakonu zapišemo kot:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{e}_r \frac{d^2R}{dt^2} = \hat{e}_r \frac{d^2}{dt^2}\left(r\left(1+\alpha(r,t)\right)\right) \approx \hat{e}_r r \frac{d^2\alpha}{dt^2} = r\alpha_{,tt} \tag{5}$$

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial R} = \frac{\partial p}{\partial r}\frac{1}{\frac{\partial R}{\partial r}} = \frac{\partial p}{\partial r}\frac{1}{1+\alpha+r\alpha_{,r}} \approx \frac{\partial p}{\partial r}(1-\alpha-r\alpha_{,r}) \tag{6}$$

$$\nabla\Phi_g = \frac{Gm}{R^2} \approx \frac{Gm}{r^2}(1-2\alpha) \tag{7}$$

m predstavja maso znotraj sferične lupine z radijem R.

Za maso sferične lupine dm velja, da se ohranja, torej je ob poljubnem času t enaka kot ob času $t=0$. Velja torej

$$dm(r,t) = 4\pi R^2(r,t)\rho(r,t)\,dR = 4\pi r^2\rho_0\,dr$$
$$r^2(1+\alpha)^2(1+\alpha+r\alpha_{,r})\rho_0(r)(1+\eta) = r^2\rho_0(r)\,dr$$
$$(1+3\alpha+2r\alpha_{,r})(1+\eta) = 1,$$

oziroma

$$\eta = -3\alpha - 2r\alpha_{,r}\,. \tag{8}$$

Potrebujemo še zvezo med tlakom in gostoto, ki pa jo dobimo iz politropnega modela

$$p_0 = K\rho_0^\gamma.$$

To zvezo vstavimo v nastavka za p in ρ, da dobimo

$$p(r,t) = K\rho_0^\gamma(r)(1+\varphi(r,t)) = K\rho^\gamma(r,t)(1+\varphi(r,t))(1-\gamma\eta(r,t))$$

oziroma

$$\varphi(r,t) = \gamma\eta(r,t) \tag{9}$$

Enačbe (2) - (9) lahko sedaj vstavimo v enačbo (1)

$$r\alpha_{,tt} = -\left(\frac{\partial p_0}{\partial r} + p_0\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)(1-\alpha-r\alpha_{,r}) - \rho_0(1+\eta)g(1-2\alpha)$$

Za nihanje uporabimo nastavek $\alpha(r,t) = a(r)e^{i\omega t}$, upoštevamo še zvezo $\frac{\partial p_0}{\partial r} = -g\rho_0$ ter dobimo

$$a(r)_{,rr} + \left(\frac{4}{r} - g\frac{\rho_0}{p_0}\right) a(r)_{,r} + \frac{\rho_0}{\gamma p_0}\left(\frac{g}{r}(4-3\gamma) + \omega^2\right) a(r) = 0 \tag{10}$$

Dobili smo torej diferencialno enačbo 2. reda za $a(r)$, ki nam opisuje amplitudo radialnega nihanja sferične lupine pri radiju r. Za reševanje enačbe potrebujemo še dva robna ali začetna pogoja. Za robni pogoj v središču zvezde predpostavimo, da je odmik tam enak 0 in napravimo limito enačbe (10) v ničli. Dobimo:

$$a(0)_{,r} = 0 \tag{11}$$

Ko napravimo limito enačbe (13) na robu zvezde, dobimo še drugi robni pogoj [1]:

$$\gamma R_0 a(R_0)_{,r} - (4-3\gamma) a(R_0) = 0, \tag{12}$$

kjer je R_0 polmer zvezde.

Enačbo (10) sedaj preuredimo v brezdimenzijsko obliko s pomočjo enačb politropnega modela zvezde:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\Theta}{d\xi}\right) = -\Theta^n \tag{13}$$

$$p_0 = p_c \Theta^{n+1} \tag{14}$$

$$\rho_0 = \rho_c \Theta^n, \tag{15}$$

pri čemer so $n = \frac{1}{\gamma - 1}$ politropni indeks, p_c in ρ_c tlak in gostota v središču zvezde, ξ pa brezdimenzijski radij, za katerega velja:

$$\xi = Ar \tag{16}$$

$$A^2 = \frac{4\pi G \rho_c^{1-\frac{1}{n}}}{K(n+1)} \tag{17}$$

Če upoštevamo še, da velja [1]

$$\frac{g_0 \rho_0}{p_0} = -\frac{(n+1)}{A\Theta}\frac{d\Theta}{d\xi}, \tag{18}$$

lahko sedaj preuredimo enačbo (10) v

$$a(\xi)_{,\xi\xi} + \left(\frac{4}{\xi} + \frac{(n+1)}{\Theta}\frac{d\Theta}{d\xi}\right) a(\xi)_{,\xi} + \left(\Omega^2 - \frac{(4-3\gamma)n}{\xi}\frac{d\Theta}{d\xi}\right) a(\xi) = 0, \tag{19}$$

pri čemer je Ω brezdimenzijska frekvenca, za katero velja

$$\Omega^2 = \frac{n}{4\pi G \rho_c}\omega^2 \tag{20}$$

Zapišimo še robna pogoja v brezdimenzijski obliki:

$$a(\xi = 0),_\xi = 0 \tag{21}$$

$$\gamma\xi_0 a(\xi_0),_\xi - (4 - 3\gamma)a(\xi_0) = 0, \tag{22}$$

kjer je ξ_0 vrednost brezdimenzijskega radija na površini zvezde.

2 Numerično reševanje Lane-Emdenove enačbe

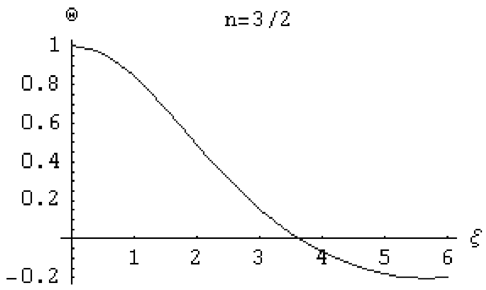
Če hočemo reševati enačbo za radialno nihanje zvezde (19), moramo poznati funkcijo $\Theta(\xi)$ ter tudi vrednost brezdimenzijskega radija ξ na robu zvezde, saj nam ta predstavlja zgornjo mejo numerične integracije. To vrednost dobimo iz pogoja $\Theta(\xi) = 0$, saj je rob zvezde definiran kot točka, kjer je gostota enaka nič. Analitične resitve Lane-Emdenove enačbe

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\Theta}{d\xi}\right) = -\Theta^n \tag{23}$$

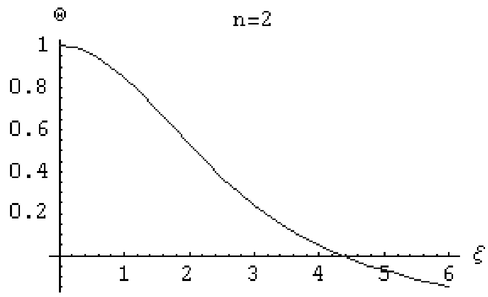
obstajajo samo za vrednosti $n = 0, 1, 5$ [2]. Pri numeričnem reševanju enačbe si pomagamo z razvojem funkcije $\Theta(\xi)$ v vrsto okoli ničle. Začetna pogoja poznamo ($\Theta(0) = 1, \Theta'(0) = 0$), ostale odvode pa izračunamo iz Lane-Emdenove enačbe. Dobimo:

$$\Theta(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6} + \frac{n\xi^4}{120} + \frac{(5n - 8n^2)\xi^6}{15120} + \ldots \tag{24}$$

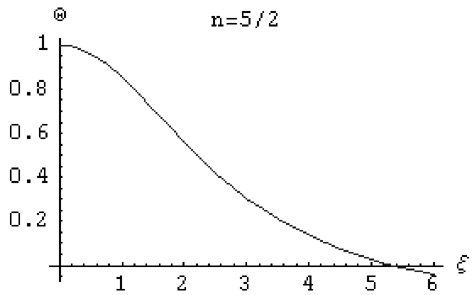
Ker je Lane-Emdenova enačba v $\xi = 0$ singularna, ne moremo začeti z numeričnim integriranjem v tej točki. S pomočjo enačbe (24) izračunamo začetne pogoje v neki točki blizu ničle ($\xi \neq 0$) [3] in numerično integriramo od te točke dalje. Mathematica nam z ukazom *NDSolve* tak sistem reši, rešitve za različne vrednosti n so prikazane na slikah od 1 do 3. Ukaz *FindRoot* nam poišče ničle teh funkcij (brezdimenzijske radije), ki so podane v Tabeli 1.



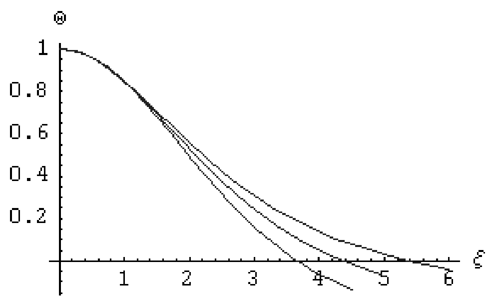
Slika 1: $\Theta(\xi)$ za $n = 3/2$



Slika 2: $\Theta(\xi)$ za $n = 2$



Slika 3: $\Theta(\xi)$ za $n = 5/2$



Slika 4: $\Theta(\xi)$ za $n = 3/2, 2, 5/2$

n	$3/2$	2	$5/2$
ξ_0	3.65375373	4.35287459	5.35527546

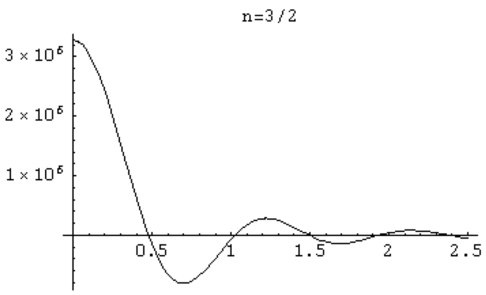
Tabela 1: Vrednost brezdimenzijskega radija zvezde za različne politropne indekse.

3 Numerično reševanje enačbe nihanja

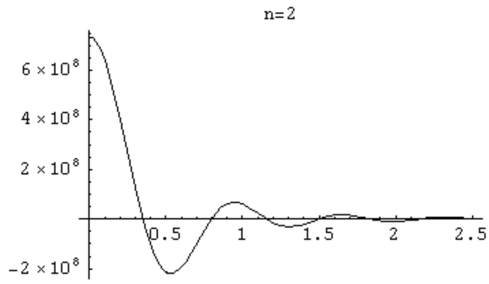
Enačbo nihanja rešujemo podobno kot Lane-Emdenovo enačbo. Ker je enačba singularna v $\xi = 0$, s pomočjo razvoja v vrsto poiščemo prvi robni pogoj v neki točki $\xi \neq 0$, od katere potem enačbo naprej numerično integriramo do brezdimenzijskega radija. Pri tem upoštevamo, da si lahko $a(0)$ izberemo poljubno, saj je vsaka rešitev, pomnožena s konstanto tudi rešitev. Lastne frekvence dobimo tako, da ponavljamo integracijo enačbe za različne frekvence, dokler ne dobimo tistih, ki izpolnijo drugi robni pogoj. Na slikah 5 - 7 so prikazane vrednost izraza

$$\gamma\xi_0 a(\xi_0)_{,\xi} - (4 - 3\gamma)a(\xi_0) \tag{25}$$

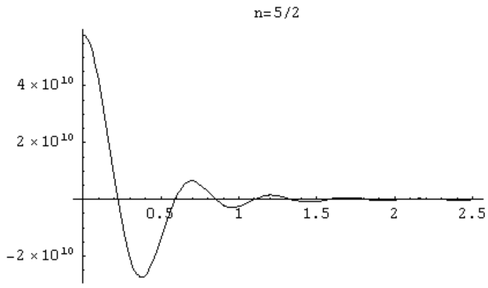
v odvisnosti od frekvence Ω za različne politropne indekse n. Frekvence, za katere je vrednost izraza 0, so lastne frekvence, saj ustrezajo 2. robnemu pogoju. Tabela 2 prikazuje lastne frekvence za politropne indekse 3/2, 2, 5/2, na slikah 8 - 13 pa so prikazane lastne funkcije za $n = 5/2$. Območje numerične integracije smo razdelili na 10000 točk.



Slika 5: Vrednost izraza (25) v odvisnosti od Ω za $n = 3/2$



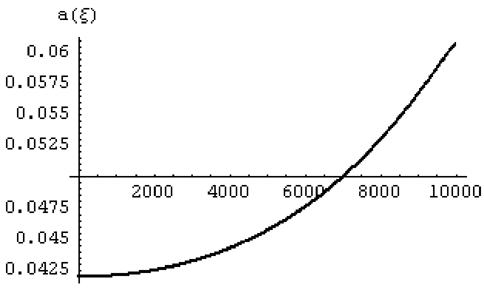
Slika 6: Vrednost izraza (25) v odvisnosti od Ω za $n = 2$



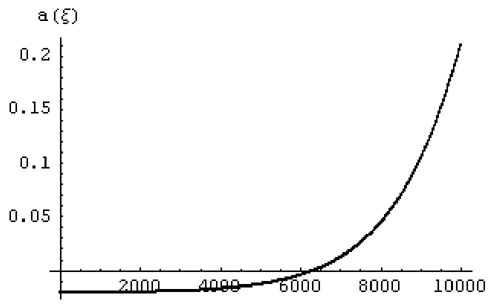
Slika 7: Vrednost izraza (25) v odvisnosti od Ω za $n = 5/2$

lastna funkcija	Ω za $n = 3/2$	Ω za $n = 2$	Ω za $n = 5/2$
0	0.47516	0.34832	0.22182
1	1.02390	0.79525	0.58961
2	1.49225	1.15312	0.84919
3	1.94199	1.49451	1.09619
4	2.38056	1.82799	1.33745
5	2.80905	2.16203	1.57181

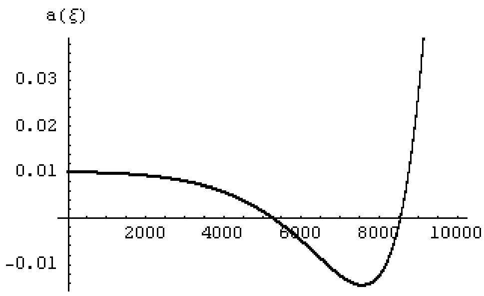
Tabela 2: Brezdimenzijske lastne frekvence za n=3/2, 2, 5/2.



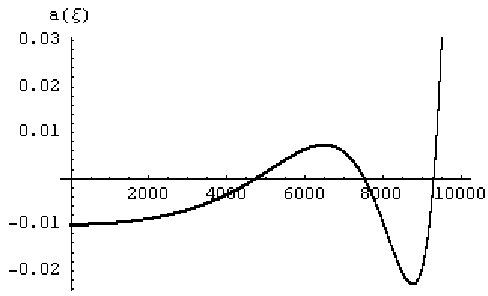
Slika 8: 1. lastna funkcija, $n = 5/2$



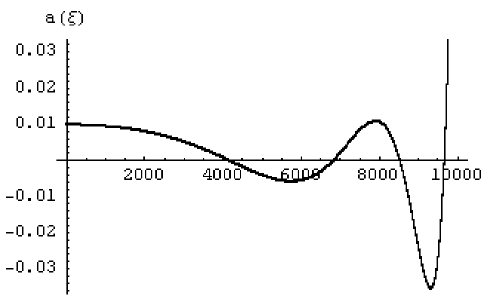
Slika 9: 2. lastna funkcija, $n = 5/2$



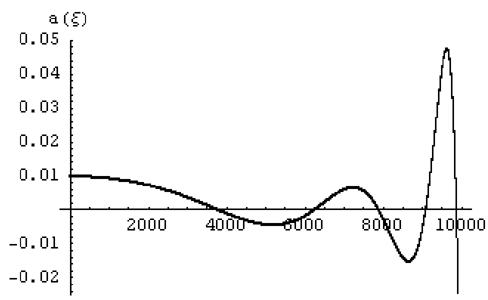
Slika 10: 3. lastna funkcija, $n = 5/2$



Slika 11: 4. lastna funkcija, $n = 5/2$



Slika 12: 5. lastna funkcija, $n = 5/2$



Slika 13: 6. lastna funkcija, $n = 5/2$

Literatura

[1] R. Kippenhahn, A.Weigert, *Stellar Structure And Evolution*, 1990, Springer Verlag

[2] S. Chandrasekar, *An Introduction to the Theory of Stellar Structure*, Dover, New York, 1958

[3] B. G. Higgins, *MATHEMATICA Applications in Chemical Engineering* http://www.higgins.ucdavis.edu/chemmath.php