

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO

GRAF KRIVULJE RASTI

Alenka Bajec

Mentor: prof. dr. Andrej Čadež

25. oktober 2007

KAZALO 1

Kazalo

1 Naloga 2

2 Definicija 2

3 Reševanje 4

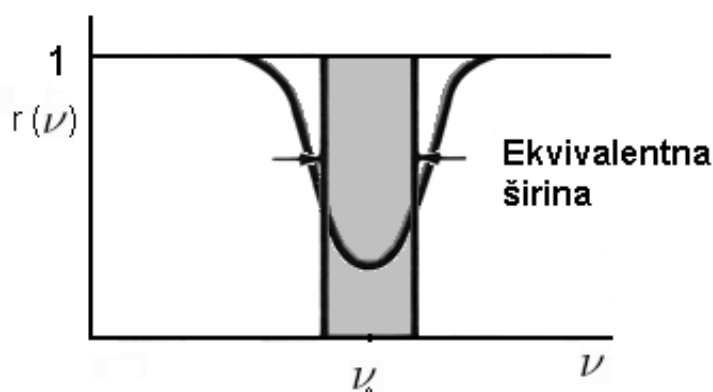
4 Zaključek 7

1 Naloga

S pomočjo Voigtove funkcije nariši graf krivulje rasti.

2 Definicija

Oblika absorpcijske črte je odvisna od števila fotonov, ki se absorbirajo pri določeni valovni dolžini. Da bi lahko primerjali jakosti različnih absorpcijskih črt glede na izvor, ali pa isto absorpcijsko črto med več različnimi izvori, uporabimo količino ekvivalentna širina W .



Slika 1: Graf prikazuje profil absorpcijske črte in ekvivalentno širino te črte.

Ekvivalentna širina črte je definirana kot širina, ki bi jo imel pravokotnik z višino 1 in površino, ki jo zajemata profil absorpcijske črte in vrednost 1. Za nek poljuben profil (slika 1) absorpcijske črte lahko zapišemo

$$W_\nu = \int_0^\infty [1 - r(\nu)] d\nu, \quad (1)$$

kjer je $r(\nu)$ preostanek intenzitete, ki jo definiramo kot razmerje med intenziteto črte in zveznega dela proti intenziteti zveznega dela, torej

$$r(\nu) = \frac{I_\nu(0)e^{-[k_l(\nu)+k_c(\nu)]h}}{I_\nu(0)e^{-k_c(\nu)h}} = e^{-k_l(\nu)h}, \quad (2)$$

kjer je $k_l(\nu)$ absorpcijski koeficient črte, $k_c(\nu)$ je absorpcijski koeficient kontinuuma, h je Planckova konstanta. Vsaka prisotna absorbirajoča atomska vrsta prispeva h $k_l(\nu)$ v obliki

$$k_l(\nu) = n_i a_i(\nu). \quad (3)$$

$a_i(\nu)$ predstavlja absorpcijski koeficient na atom za atomsko vrsto i .

Na obliko absorpcijske črte v spektru vpliva več dejavnikov, upoštevala jih bom le nekaj: naravna razširitev črte, Dopplerjeva razširitev in dušenje.

Naravna razširitev črte je posledica principa nedoločenosti. Energije istega vzbujenega stanja se pri različnih atomih nekoliko razlikujejo, tako je oblika absorpcijskega koeficienta Lorentzova,

$$\tilde{a}(\nu) = a_0 \frac{\gamma/4\pi^2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2}, \quad (4)$$

kjer je $a_0 = (\pi e^2/m_e c)f$, f predstavlja verjetnost prehoda med atomskimi stanji.

Dopplerjev efekt je še en zelo pomemben vir širitev absorpcijskih črt v zvezdnih spektrih. Premikajoč atom namreč absorbira sevanje nekoliko drugačne valovne dolžine kot stacionaren atom. Če ima stacionaren atom absorpcijski koeficient $a(\nu)$, potem ima atom, ki se premika s hitrostjo v proč od izvora, absorpcijski koeficient $a(\nu')$, kjer je $\nu' = \nu - \nu(v/c)$. Dano frekvenco absorpcijskega koeficienta dobimo z množenjem absorpcijskega koeficienta premikajočega se atoma $a(\nu - \nu v/c)$ z relativno količino atomov, ki se premikajo s to hitrostjo $f(v)$ in integracijo po vseh hitrostih:

$$a(\nu) = \int_0^\infty \tilde{a}(\nu - \nu v/c) f(v) dv. \quad (5)$$

v je komponenta hitrosti v smeri fotona, definirana tako, da pozitivna hitrost povzroči rdeči premik. Pri porazdelitvi hitrosti atomov $f(v)$ je treba upoštevati termično gibanje, ki ga opiše Maxwellov zakon:

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{1/2} e^{-mv^2/2kT}. \quad (6)$$

Količina

$$v_D = \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

se imenuje *termična Dopplerjeva hitrost*. Če ta izraz (6) uporabimo v enačbi (5), dobimo

$$a(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_D} \int_0^\infty \tilde{a}(\nu - \nu v/c) e^{-mv^2/2kT} dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Delta\nu_D} \int_0^\infty \tilde{a}(\nu - \nu') e^{-\nu'^2/\Delta\nu_D^2} d\nu',$$

kjer je

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_0 v_D}{c} = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Dopplerjeva širina črte.

Dušenje - razširitve črt lahko povzročajo tudi medatomske "trki". Na atom v vzbujenem stanju vpliva drugi atom, ki leti mimo njega. Tu privzamemo, da je časovno območje trka majhno glede na življenjsko dobo vzbujenega stanja. Ta proces lahko povzroči zgodnejši prehod atoma v nižje stanje kot sicer. Efektivni življenjski čas atoma se skrajša, saj je energija nivoja po principu nedoločenosti ustrezno slabše definirana. Profil črte je dušeni profil, a s povečano vrednostjo γ zaradi trka atoma in prehoda atoma v nižje stanje.

Če je število induciranih prehodov s trkom na enoto časa enako Γ , je efektivna konstanta dušenja enaka $\gamma + \Gamma$.

Če želimo upoštevati tako Dopplerjevo razširitev kot dušenje, je presek absorpcije kot funkcija frekvence predstavljena s konvolucijo obeh efektov:

$$a(\nu) = \frac{\pi e^2}{m_e c} f \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{\Delta\nu_D} e^{-(\Delta\nu - \Delta\nu')^2 / \Delta\nu_D^2} \frac{\gamma / 4\pi^2}{\Delta\nu'^2 - (\gamma / 4\pi)^2} d\Delta\nu',$$

kjer je e naboj elektrona, m_e masa elektrona, c pa hitrost svetlobe v vakuumu. Z uvedbo novih spremenljivk

$$v = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}, \quad u = \frac{\Delta\nu'}{\Delta\nu_D}, \quad \alpha = \frac{\gamma}{4\pi\Delta\nu_D} = \frac{\gamma}{2\Delta\omega_D}$$

to enačbo lahko zapišemo v obliki

$$a(\nu) = \frac{\pi e^2}{m_e c} f \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Delta\nu_D} \left[\frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(v-u)^2}}{u^2 + \alpha^2} du \right]. \quad (7)$$

Tipična vrednost za α je 0.1. Količina v oglatih oklepajih se imenuje *Voigtova funkcija*, $H(\alpha, v)$.

V centru absorpcijske črte prevladuje prispevek Dopplerjeve razširitve, spremembe vrednosti α ne vplivajo na ta del profila črte, medtem ko α določa obliko kril črte. Center črte torej povzroča Dopplerjev efekt, krila pa dušenje. V krilih črte, $v \gg \alpha$, Voigtovo funkcijo lahko zelo točno opišemo z

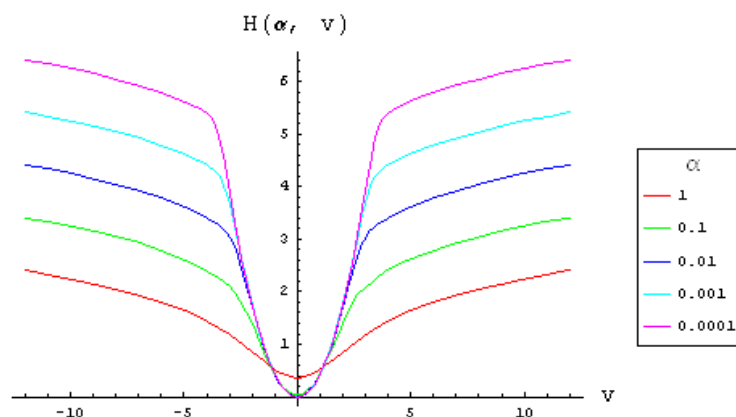
$$H(\alpha, v) \cong \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v^2}. \quad (8)$$

Krila dušenja se za večje vrednosti α raztezajo daleč izven centra črte, kar v praksi otežuje točno definicijo nivoja kontinuuma v spektroskopiji zvezd.

3 Reševanje

Kot pomoč pri iskanju rešitve naloge sem uporabila program *Mathematica*.

Najprej sem s funkcijo *NIntegrate* poiskala obliko Voigtove funkcije (slika 2). Opazimo lahko, da se funkcija v vseh primerih, razen pri $\alpha = 1$, v centru ne spremeni, krila se manjšajo z manjšanjem vrednosti α .



Slika 2: Graf prikazuje potek Voigtove funkcije pri različnih vrednostih za α . Rdeča krivulja predstavlja Voigtovo funkcijo pri $\alpha = 1$, zelena pri $\alpha = 0.1$, temno modra pri $\alpha = 0.01$, svetlo modra pri $\alpha = 0.001$ in vijolična pri $\alpha = 0.0001$.

Krivuljo rasti predstavlja graf ekvivalentne širine absorpcijske črte v odvisnosti od koncentracije. Če torej v enačbo (7) vstavimo enačbo (1) ter upoštevamo enačbi (2) in (3), dobimo

$$W_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \exp \left(C \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(v-u)^2}}{u^2 + \alpha^2} \right) \right] dv, \quad (9)$$

kjer je $C = \frac{Nhf\sqrt{\pi}e^2}{\Delta\nu_D m_e c}$ koncentracija, ki je sorazmerna s številsko gostoto absorbirajočih atomov v snovi.

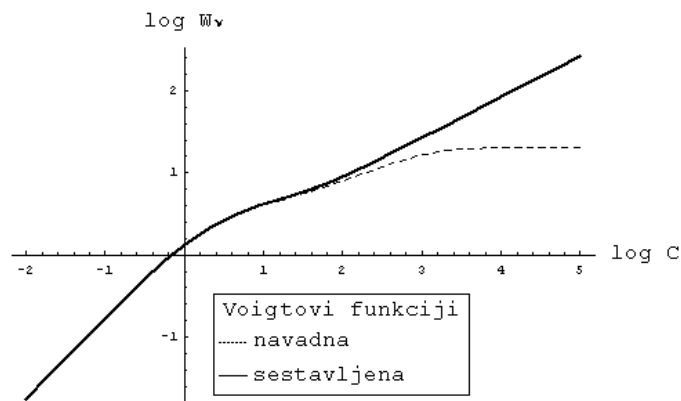
Ker integrala ni mogoče integrirati analitično, sem se reševanja lotila z numeričnim integriranjem. Območje integrala za W_ν sem razdelila na n delov in vsakega posebej aproksimirala s pravokotnikom z višino enako vrednosti integrirane funkcije in širino enako razdalji med dvema deloma. Takšen pristop je bil potreben, ker Mathematica ni dovoljevala izvedbe dveh funkcij *NIntegrate*, kjer je ena vgnuzdena v drugi.

Funkcijo pod integralom sem lahko integrirala le v območju $-10 \leq v \leq 10$ s koraki po 0.01. Območje za integracijo je bilo omejeno, saj so bile pri večjih območjih vrednosti v eksponentu tako velike, da jih program Mathematica ni uspel rešiti.

Ker je znano, da funkcija (8) zelo dobro opiše Voigtovo funkcijo v primeru $v \gg \alpha$, sem Voigtovo funkcijo sestavila s funkcijo $H(\alpha, v)$ pri vrednostih $|v| < 10$ in z omenjeno aproksimacijo (enačba (8)) pri večjih vrednostih za v . Tako je bilo mogoče funkcijo W_ν integrirati na veliko širšem območju.

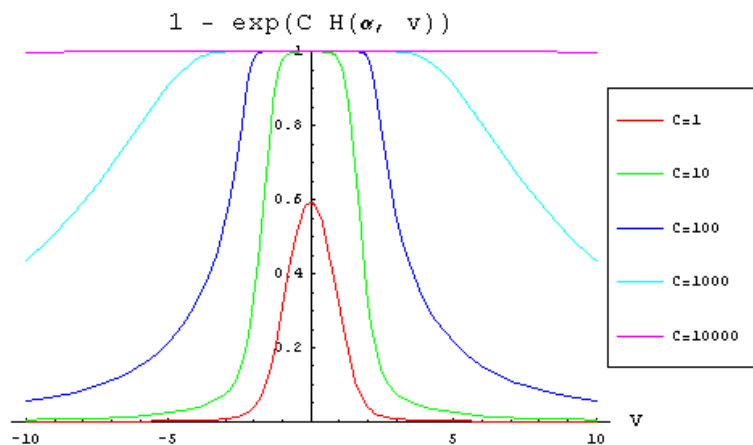
Slika 3 prikazuje krivuljo rasti, dobljeno z obema opisanimi metodama. Kot lahko opazimo, se pri krivulji prve metode (prekinjena črta), se pravi integraciji z neokrnjeno Voigtovo funkcijo $-10 \leq v \leq 10$ vrednost za $\log W_\nu$ večja z večanjem C , nato pa se ustali pri neki vrednosti.

Pri drugi metodi s sestavljeno Voigtovo funkcijo (polna črta), integrirani v območju $-5000 \leq v \leq 5000$ s koraki po 0.01, vrednost raste še naprej. Tako lahko ocenimo, do katere vrednosti prva metoda še doseže dovolj točne rezultate.



Slika 3: Na grafu sta prikazana poteka krivulje rasti, torej logaritem ekvivalentne širine črte v odvisnosti od logaritma koncentracije pri vrednosti za $\alpha = 0.1$. Prekinjena črta predstavlja krivuljo rasti z integracijo po v od -10 do 10 , polna črta pa z integracijo od -5000 do 5000 .

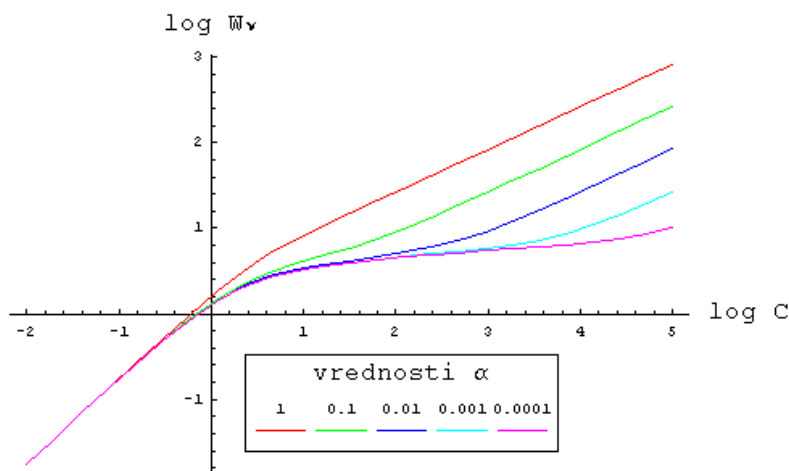
Da bi sliko 3 bolje razumeli, sem na sliki 4 predstavila še funkcijo, ki jo integriramo, torej $1 - \exp(-CH(\alpha, v))$. Opazimo lahko rast centra krivulje pri večanju vrednosti C . Ko vrh centra krivulje doseže vrednost 1, se ne dviguje več (saturacija), ampak le še širi. Vidimo, da je treba za dovolj velike C razširiti meje integracije za v , če želimo izračunati pravo velikost ploščine pod krivuljo.



Slika 4: Na grafu je predstavljena funkcija $1 - \exp(-CH(\alpha, v))$ pri različnih vrednostih za C v odvisnosti od v , $\alpha = 0.1$.

V krivulji rasti lahko opazimo tri režime, kjer na začetku prevladuje naravna širina črte ($W_\nu \propto C$), nato Dopplerjeva razširitev ($W_\nu \propto \sqrt{\ln C}$), nato pa še prispevek dušenja zaradi trkov ($W_\nu \propto \sqrt{C}$, te aproksimacije so teoretično izpeljane vrednosti), ki prevladuje v režimu z največjo gostoto absorbirajočih atomov. Graf krivulje rasti ima pri različnih vrednostih za α

nekoliko drugačno obliko (Slika 5). Opazimo lahko, da je krivulja rasti bolj ukrivljena navzdol pri manjših vrednostih za α , medtem ko krivulja pri $\alpha = 1$ takoj preide v režim z naklonom $W_\nu \propto \sqrt{C}$, Dopplerjeva razširitev na tej krivulji torej nikjer ne prevladuje. Z manjšanjem vrednosti α se prevoj krivulje premika proti večjim vrednostim za C .



Slika 5: Graf predstavlja obliko krivulje rasti za različne vrednosti za α . Rdeča krivulja predstavlja obliko krivulje rasti pri $\alpha = 1$, zelena pri $\alpha = 0.1$, temno modra pri $\alpha = 0.01$, svetlo modra pri $\alpha = 0.001$ in vijolična pri $\alpha = 0.0001$.

4 Zaključek

Pri razlagi grafa krivulje rasti (slika 5, vrednost $\alpha = 0.1$ vsebuje zelena krivulja) si lahko pomagamo s funkcijo, ki jo integriramo (slika 4). Prvo spremembo naklona krivulje rasti zaznamo v območju $1 < C < 10$. Na sliki 4 pri grafu za $C = 10$ že lahko opazimo saturacijo, kar je lahko zelo verjeten vzrok za zmanjšan naklon krivulje rasti. Sklepamo torej lahko, da je prva sprememba v naklonu krivulje direktna posledica tega pojava.

Razlog druge spremembe naklona je nekoliko manj očiten. Povzročijo ga krila Voigtove funkcije, ki so posledica dušenja zaradi trkov. Ta prispevek pri $\alpha = 0.1$ prevlada malo pod vrednostjo $C = 1000$.

Literatura

- [1] <http://astronomy.swin.edu.au/cosmos/E/Equivalent+Width>
- [2] R. Bowers, T. Deeming: *Astrophysics I*, Jones and Bartlett Publishers (1984)
- [3] www.wikipedia.org