

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za fiziko

Teorija gravitacije
Domača naloga

Ocena števila zaznanih združitvev dvojnic z detektorjem LIGO

Avtor: Jošt Vrabič Koren
Mentor: prof. dr. Andrej Čadež

Ljubljana, 10. 8. 2015

Teorija

Celotna izsevana moč dvojnega sistema je podana z enačbo:

$$L_{GV} = \frac{G}{5c^5} \text{Tr}(\ddot{Q} \cdot \ddot{Q}) \quad (\text{za izpeljavo glej vir [1], stran 101-103}). \quad (1)$$

Reduciran kvadrupolni moment in vse količine, ki v njem nastopajo so sledeče:

$$Q^{ij} = I^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \delta_{kl} I^{kl} \quad (2)$$

$$I^{ij}(t) = \int y^i y^j T^{00}(t, y) d^3 y = \int x^i x^j \rho dV \quad (3)$$

$$x_a^i = r(\varphi) \frac{\mu}{M_a} (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0) \quad (4)$$

$$x_b^i = r(\varphi) \frac{\mu}{M_b} (-\cos(\varphi), -\sin(\varphi), 0) \quad (5)$$

$$\rho = \delta(x^3) [M_a \delta(x^1 - x_a^1) \delta(x^2 - x_a^2) + M_b \delta(x^1 - x_b^1) \delta(x^2 - x_b^2)] \quad (6)$$

Zvezde se gibljejo po ekscentričnih orbitah in razdalja med zvezdami je odvisna od njihove lege, ki je podana s φ . Masi M_a in M_b sta masi posameznih zvezd, $a M_a = b M_b$, $a + b = r$.

$$\mu = \frac{M_a M_b}{M_a + M_b} \quad \text{pa je reducirana masa.}$$

Sedaj razpišimo integrale, ki nastopajo v kvadrupolnem momentu:

$$\begin{aligned} I^{11} &= \int x^1 x^1 \rho dV = x_a^1 x_a^1 M_a + x_b^1 x_b^1 M_b = \left(\frac{\mu^2 r^2(\varphi)}{M_a^2} M_a + \frac{\mu^2 r^2(\varphi)}{M_b^2} M_b \right) \cos^2(\varphi) = \mu^2 r^2 \left(\frac{1}{M_a} + \frac{1}{M_b} \right) \cos^2(\varphi) \\ &= \cos^2(\varphi) r^2 \mu = \frac{1}{2} (\cos(2\varphi) + 1) r^2 \mu \quad .(7) \end{aligned}$$

Podobno izračunamo še:

$$I^{22} = \sin^2(\varphi) r^2 \mu = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\varphi)) r^2 \mu \quad , (8)$$

$$I^{12} = I^{21} = \sin(\varphi) \cos(\varphi) r^2 \mu = \frac{1}{2} \sin(2\varphi) r^2 \mu \quad , (9)$$

$$\frac{1}{3} \delta^{ij} \delta_{kl} I^{kl} = \frac{1}{3} \delta^{ij} \left(\frac{1}{2} (\cos(2\varphi) + 1) + \frac{1}{2} (1 - \cos(2\varphi)) \right) r^2 \mu = \frac{1}{3} \delta^{ij} r^2 \mu \quad (10)$$

Zapišimo reducirani kvadrupolni moment:

$$Q^{ij} = I^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \delta_{kl} I^{kl} = \frac{1}{2} r^2 \mu J^{ij}(\varphi) \quad , (11)$$

kjer je:

$$J^{ij}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) + \frac{1}{3} & \sin(2\varphi) & 0 \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) + \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} . \quad (12)$$

Kvadrupolni moment moramo sedaj trikrat odvajati po času. Za lažje računanje vpeljemo nove količine: $h = r^2 \dot{\varphi}$, $u = r^{-1}$, $\frac{d}{dt} = hu^2 \frac{d}{d\varphi}$ in $J'''' = -4J'$. h je vrtilna količina na enoto mase. Za to lahko predpostavimo, da se ohranja, saj se orbitalna perioda dvojnega sistema spreminja zelo počasi, in jo lahko nesemo ven iz odvoda:

$$\ddot{Q}^{ij} = (hu^2 d/d\varphi)^3 \left(\frac{1}{2} \frac{u}{u^2} J^{ij}(\varphi) \right) = \frac{u h^3}{2} (u^2 d/d\varphi)^3 \left(\frac{1}{u^2} J^{ij}(\varphi) \right) \quad (13)$$

To izračunamo (npr. z Mathematico) in dobimo:

$$\ddot{Q}^{ij} = u h^3 (u^2 (u' u'' - u u''') J^{ij} - 2u^3 (u'' + u) J'^{ij}) . \quad (14)$$

Z uporabo sledi tenzorjev, $Tr(J^2) = \frac{8}{3}$, $Tr(JJ') = 0$ in $Tr(J'^2) = 8$ lahko rešimo enačbo (1)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ab} \ddot{Q}^{ab} \rangle . \quad (15),$$

Ne smemo pa pozabiti, da je Q še vedno povprečje, torej

$$\langle Tr(\ddot{Q}^2) \rangle = \frac{1}{P} \int_0^P dt Tr(\ddot{Q}^2) = \frac{u^2 h^5 2\pi}{2\pi P} \int_0^{2\pi} u^{-2} \frac{d\varphi}{dt} dt [32u^4 (u' u'' - u u''')^2 + \frac{8}{3} u^6 (u'' + u)^2] \quad (16)$$

Uporabimo rešitev za relativne koordinate

$$u = \frac{1}{a} (1 - e^2)^{-1} [1 - e \cos(\varphi)] , \quad (17)$$

in s tem poenostavimo integral

$$u + u'' = \frac{1}{a} (1 - e^2)^{-1} (1 - e \cos(\varphi) + e \cos(\varphi)) = \frac{1}{a} (1 - e^2)^{-1} \quad (18)$$

$$u' u'' - u u''' = \frac{e^2}{a^2} (1 - e^2)^{-2} (\cos(\varphi) \sin(\varphi) - \cos(\varphi) \sin(\varphi) + \sin(\varphi)) = \frac{e^2}{a^2} (1 - e^2)^{-2} \sin(\varphi) . \quad (19)$$

$$\begin{aligned} (16) &= \frac{32}{a^6} (1 - e^2)^{-6} \int_0^{2\pi} d\varphi [(1 - e \cos(\varphi))^4 + \frac{1}{12} (1 - e \cos(\varphi))^2 (e \sin(\varphi))^2] \\ &= \frac{2\pi 32}{a^6} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) (1 - e^2)^{-6} . \quad (20) \end{aligned}$$

Uporabimo še $h^2 = aGM(1 - e^2)$, $M = M_a + M_b$ in končno dobimo

$$\frac{G}{5c^5} \ddot{Q}_{ab} \ddot{Q}^{ab} = \frac{32\mu^2 M^3 G^4}{5c^5 a^5} (1 - e^2)^{-7/2} \left[1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right] . \quad (21)$$

Če bi izpeljali moč sevanja dvojnega sistema v katerem nastopata dve enaki masi, bi dobili

$$\frac{dE}{dt} = \frac{32\mu^2 M^3 G^4}{5c^5 a^5} . \quad (22)$$

To ustreza naši rešitvi (21), saj ima sistem z dvema enakima masama ekscentričnost enako 0.

Za nadaljevanje naloge nas zanima, kako se orbitalna perioda spreminja s časom. Potencialna energija dvojnega sistema je

$$E_{pot} = \frac{-GM_1 M_2}{R} . \quad (23)$$

To odvajamo po času in upoštevamo, da se razdalja med zvezdama spreminja s časom

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{-GM_1 M_2}{R} \right) = -GM_1 M_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R} \right) . \quad (24)$$

Uporabimo Keplerjev zakon

$$R = 2a = 2 \sqrt[3]{GM \left(\frac{P}{2\pi} \right)^2} , \quad (25)$$

ga vstavimo v odvod R^{-1}

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{(2\pi)^2}{GM}} \frac{dP^{-2/3}}{dt} = \frac{-1}{2} \sqrt[3]{\frac{(2\pi)^2}{GM}} \frac{dP}{dt} \frac{2}{3} P^{-5/3} \quad (26)$$

in to nesemo v enačbo (24)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{3} G^{2/3} M_1 M_2 M^{-1/3} (2\pi)^{2/3} P^{-5/3} \frac{dP}{dt} . \quad (27)$$

Sedaj predpostavimo, da naš sistem vso energijo izgublja z gravitacijskim sevanjem. Enačimo enačbi (22) in (27) (minus na levi strani predstavlja izgubo energije)

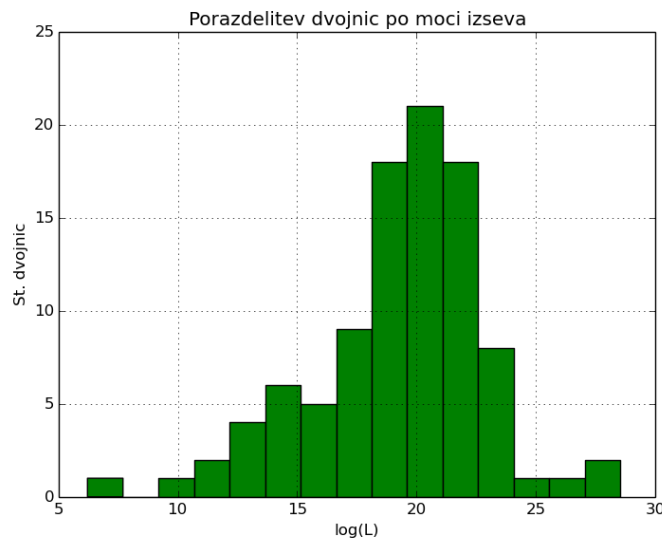
$$\frac{-32\mu^2 M^3 G^4}{5c^5 \left(GM \left(\frac{P}{2\pi} \right)^2 \right)^{5/3}} = \frac{1}{3} G^{2/3} M_1 M_2 M^{-1/3} (2\pi)^{2/3} P^{-5/3} \frac{dP}{dt} \quad (28)$$

in dobimo

$$P^{5/3} \frac{dP}{dt} = \frac{-96}{5} \mu M^{2/3} G^{5/3} (2\pi)^{8/3} c^{-5} . \quad (29)$$

Rezultati

Na spletni strani <http://www.johnstonsarchive.net/relativity/binpulstable> najdemo seznam pulzarjev v dvojnih sistemih v naši galaksiji. Podatke sem vstavil direktno v enačbo (21) in dobil sledečo porazdelitev po izsevih



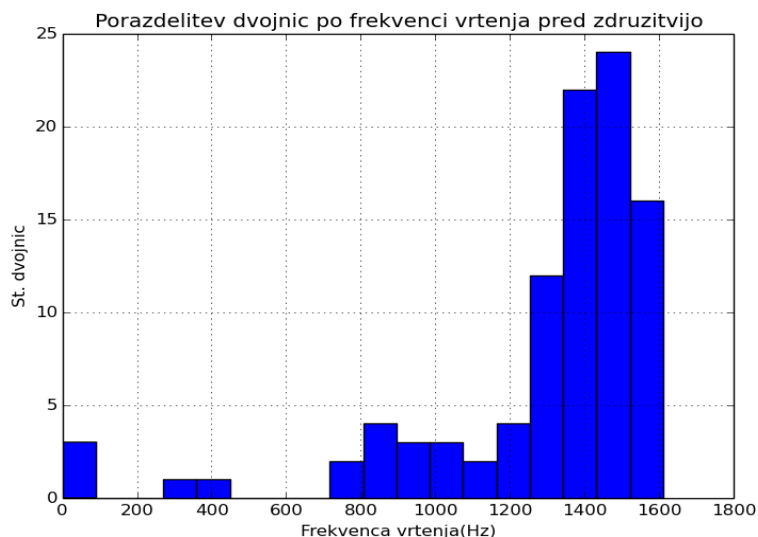
Graf 1: Porazdelitev dvojníc v naši galaksiji po izsevu gravitacijskih valov. Os x je logaritmirana, 20 pomeni 10^{20} W

Za primerjavo: celoten svetlobni izsev sonca je $3,85 \times 10^{26} \frac{J}{s}$, gravitacijski pa zgolj okrog 300W.

Ker vsako dvozzvezdje gravitacijsko seva, izgublja energijo in zvezdi se zato približujeta. Ob združitvi oz. pred njenim začetkom je izsev gravitacijskih valov največji. To se zgodi, ko je

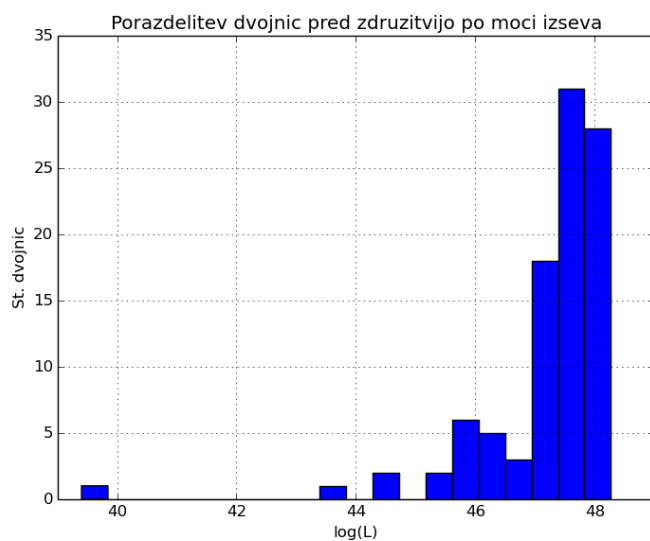
$$a \sim 3R_{schw} \quad [5]. \quad R_{schw} \text{ je Schwarzschildov radij, ki je podan z enačbo } R_{schw} = \frac{2GM}{c^2} . \text{ Če to}$$

vstavimo v tretji Keplerjev zakon $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$, dobimo za naše dvojnice frekvence reda 1kHz.



Graf 2: Porazdelitev dvojnic po frekvenci vrtenja pred združitvijo

Enačba (21) pri takih frekvencah/razdaljah preide v enačbo (22), saj gre ekscentričnost proti nič. Zato uporabimo formulo (22) in dobimo sledečo porazdelitev

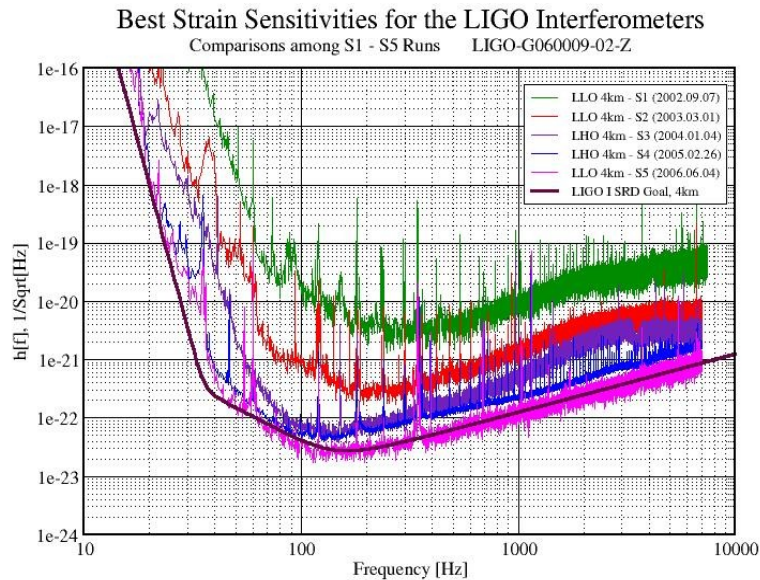


Graf 3: Porazdelitev dvojnic pred združitvijo po moči izseva. Os x je logaritmirana, 40 pomeni 10^{40} W

Napoved LIGO

Točno število dvojnic s pulzarji v naši galaksiji še ni poznano. Zato sem za vsako dvojnico iz seznama izračunal razdaljo, do katere jo je detektor LIGO še sposoben zaznati in povprečil te razdalje. Iz tega povprečja dobimo volumen v katerem smo sposobni zaznati naše dvojnice. Da

lahko podamo oceno, koliko signalov bo LIGO zaznal na leto, potrebujemo podatek, koliko dvojnic se združi v nekem volumnu na časovno enoto – hitrost združitev. V različnih virih so podatki različni. Nekateri so izračunani zgolj na podlagi teorije, nekateri pa z modeliranjem na podlagi že znanih opazovanj dvojnic. Ocene se gibljejo med $10^{-4} - 10^{-8} \text{ Mpc}^{-3} \text{ leto}^{-1}$ ([8] - [11]). To hitrost moramo zgolj pomnožiti z našo prostornino $V_{max} = \frac{4r_{max}^3}{3}$, kar nam da končno oceno.



Graf 4: Frekvenčna odvisnost detektorja LIGO

Občutljivost detektorja LIGO nam podaja zgornji graf [6]. Na y osi je t.i. “strain sensitivity” (Sh), to je koliščna je občutljivost detektorja za zaznavanje nihanja medsebojne razdalje dveh mirujočih mas, če na njuno veznico pravokotno vpada gravitacijski val. Enota je $\text{Hz}^{-1/2}$. Če na detektor vpada periodičen gravitacijski signal, katerega ustrezna komponenta gravitacijskega tenzorja niha kot $h \sin(\omega t)$, bo detektor ta signal zaznal, ko bo $h\sqrt{t} \geq Sh$ [7].

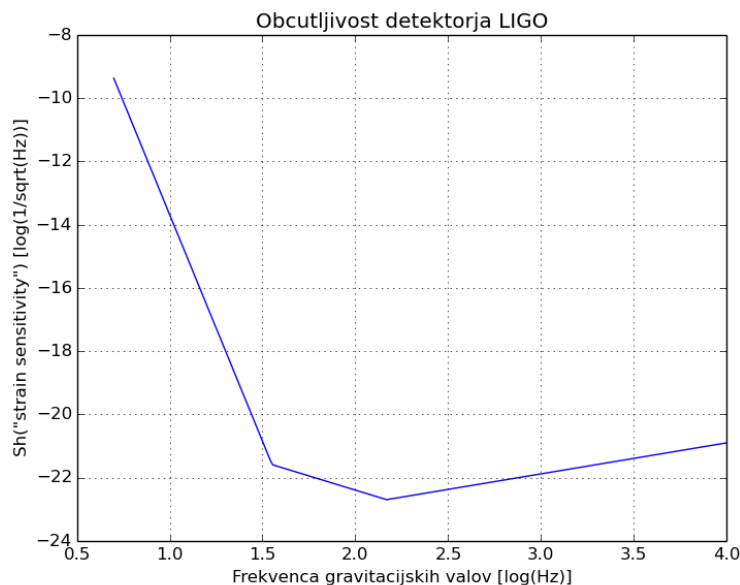
Kot je iz zgornjega grafa razvidno, je Sh močno odvisen od frekvence. To odvisnost sem razdelil na tri dele - tri premice na zgornjem grafu (do 36 Hz, 36-150 Hz, in od 150Hz dalje). Premice na log-log grafu predstavljajo enačbe $Sh(\nu) = A * \nu^K$. Koeficienti teh premic na zgornjem grafu so

$$A_1 = 4.36515000226, \quad K_1 = -14.3271094705$$

$$A_2 = 1.54721012857 \times 10^{-19}, \quad K_2 = -1.79374465423$$

$$A_3 = 1.49151912802 \times 10^{-25}, \quad K_3 = 0.980344082611$$

Z enotami se tu nisem ukvarjal, lahko jih dodamo naknadno ali pa 'normiramo' frekvenco in A-ju dodamo enote Sh-ja. Če vzamemo najboljšo, pričakovano občutljivost, dobimo s temi koeficienti sledečo odvisnost, ki ustreza uradni



Graf 5: Pričakovana občutljivost detektorja LIGO. Obe osi sta logaritmirani.

Pri združitvi dvojnic signal ni več sinusen, saj tako frekvenca, kot izsev gravitacijskih valov naraščata. Da dobimo oceno o občutljivosti detektorja in posledično r_{max} , za čas lahko vzamemo čas v katerem se izsev spremeni iz polovice največjega do največjega ($t(\frac{L_{max}}{2} \rightarrow L_{max})$). To storimo tako, da enačbo (29) pointegriramo v mejah $P_1 - P_2$, kjer P_1 predstavlja periodo pri polovičnem izsevu, P_2 pa periodo pri največjem izsevu. Periodo P_1 dobimo s primerjavo celotnega in polovičnega izseva. Izkaže se: $P_1 = P_2 \times 2^{\frac{3}{10}}$. Za frekvenco vzamemo povprečno frekvenco v tem času in za amplitudo gravitacijskih valov karakteristično (povprečeno) amplitudo $h = (\frac{32}{5})^{1/2} \frac{G^{5/3} \mu M^{2/3}}{c^4 r} (\pi \nu)^{2/3}$ [3, 4], kjer je r razdalja od vira do nas. Paziti moramo še na to, da frekvenca gravitacijskih valov ni enaka frekvenci kroženja, temveč je $\nu = 2 \nu_{kroženja}$ [2, 4]. Sedaj iz zgornje 'detekcijske' neenačbe ($h \sqrt{t} \geq Sh$) izrazimo r ter ga nadomestimo z r_{max} , s tem, da neenačaj spremenimo v enačaj.

$$r_{max} = (\frac{32}{5})^{1/2} \frac{G^{5/3} \mu M^{2/3}}{c^4 Sh(\nu)} (\pi \nu)^{2/3} \sqrt{t} \quad (30)$$

Sedaj lahko izračunamo r_{max} za vsako izmed naših dvojnic.

Končna ocena: $r_{max} = 73,8 \text{ Mpc}$ in število detekcij $(0,0168 - 168) / \text{leto}$.

Viri

- [1] A. Čadež, *Teorija gravitacije*, DMFA, 2011
- [2] P. C. Peters, J. Mathews, *Gravitational Radiation from Point Masses in a Keplerian Orbit*, Physical Review 131: 435–440, 1963
- [3] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields, Course of Theoretical Physics, vol. 2*, Pergamon Press, 1975, 4th edition.
- [4] K. A. Postnov, L. R. Yungelson, *The Evolution of Compact Binary Star Systems*, 2014
- [5] E. E. Flanagan, S. A. Hughes, Phys. Rev. D, 57, 4535, 1998
- [6] <https://www.advancedligo.mit.edu/summary.html>, 9.8.2015
- [7] J.-A. Marck, J.-P. Lasota, *Relativistic Gravitation and Gravitational Radiation*, Cambridge University Press, 1997
- [8] J. Aasi in ostali, *Prospects for Localization of Gravitational Wave Transients by the Advanced LIGO and Advanced Virgo Observatories*, 2013
- [9] K. Chunglee, *Galactic Merger Rates of Pulsar Binaries*, 2006
- [10] J. B. Camp, N. J. Cornish, *The Status of Gravitational Wave Astronomy*
- [11] C. J. Moore, R. H. Cole, C. P. L. Berry, *Gravitational-wave sensitivity curves*, 2014