

Teorija gravitacije

Domača naloga

Miha Škerget
Fakulteta za matematiko in fiziko

6. april 2011

1 Naloga

Naloga je raziskati elektromagnetno polje, ki je podano s spodnjim potencialom:

$$\Psi = A(\cos \gamma e^{i\Delta} \mathcal{R}e[Y_{lm}(\Theta, \phi)] + \sin \gamma e^{-i\Delta} \mathcal{I}m[Y_{lm}(\Theta, \phi)]) h_l^{(1)}(kr) e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

Podrobno se pogleda polje dipola ($l = 1$) in ugotovi kako prosta parametra γ in Δ vplivata na polarizacijo.

2 Uvod

Napetostni tenzor je eden najpomembnejših pojmov teorije gravitacije. Napetostni tenzor elektromagnetnega polja je podrobno izpeljan v skripti prof. A. Čadeža - Teorija gravitacije([1]) in je enak:

$$\mu_0 T_{\mu\nu}^{EM} = (A_{\lambda,\mu} - A_{\mu,\lambda})(A_{\nu,\lambda} - A_{\lambda,\nu}) - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} [(A_{\lambda,\sigma} - A_{\sigma,\lambda})(A^{\lambda,\sigma} - A^{\lambda,\sigma})] \quad (2)$$

kjer je v tem zapisu A četverni potencial, definiran kot $A^\mu = \{\phi/c, A^x, A^y, A^z\}$. Tak potencial je uporaben za opis električnega in magnetnega polja, zato lahko izrazimo napetostni tenzor s komponentami tudi takole:

$$T_{00}^{EM} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_0} B^2 + \epsilon_0 E^2 \right), \quad (3)$$

$$T_{0i}^{EM} = -\frac{1}{\mu_0 c} (\vec{E} \times \vec{B})_i, \quad (4)$$

$$T_{ij}^{EM} = \frac{1}{2} \delta_{ij} (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) - \epsilon_0 E_i E_j - \frac{1}{\mu_0} B_i B_j. \quad (5)$$

Komponenta T_{00}^{EM} predstavlja gostoto EM energije, $-cT_{0i}^{EM}$ so komponente gostote energijskega toka (Poyntingovega vektorja), T_{ij}^{EM} pa so komponente tlaka elektromagnetnega polja.

Imamo sistem, ki generira elektromagnetno valovanje. Opazujemo ga iz velike oddaljenosti, od koder je oddajnik videti majhen. V obravnavanem prostoru ni drugih izvorov elektromagnetnega valovanja.

Najprej se poišče najbolj splošne rešitve enačb EM polja za vektorski potencial v veliki oddaljenosti od izvorov. Tu ni ne nabojev in ne tokov in se enačbe polja ob umeritvenem pogoju $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ (sevalna umeritev) močno poenostavijo.

$$\nabla^2 a^i + k^2 a^i = 0 \quad (6)$$

$$a^i_{,i} = 0 \quad (7)$$

Upoštevali smo separacijo časovne spremenljivke $A^i = a^i e^{-i\omega t}$, in $k = \frac{\omega}{c}$. Sedaj poiščemo preprosto obliko vektorskega polja, katerega divergenca je avtomatično enaka nič. Na tem mestu si pomagamo z iz kvantne mehanike izposojenim operatorjem za vrtilno količino:

$$\vec{\mathcal{L}} = \vec{r} \times i\nabla. \quad (8)$$

Ta operator ima za nas dve pomembni lastnosti. Divergenca vektorskega polja $\vec{\mathcal{L}}\psi$ je avtomatično enaka nič za vsako zvezno odvedljivo funkcijo $\psi(x, y, z)$ in operator komutira z Laplaceovim operatorjem. Od tod sledi, da lahko eno družino rešitev zapišemo v obliki:

$$\vec{a}^{(1)} = \vec{\mathcal{L}}\psi. \quad (9)$$

Obstaja še ena linearno neodvisna rešitev. Rotor vektorskega polja $\nabla \times \vec{\mathcal{L}}$ izpolnjuje naše zahteve zato lahko zapišemo drugo rešitev enačb polja:

$$\vec{a}^{(2)} = \frac{1}{k} \nabla \times \vec{\mathcal{L}}\chi. \quad (10)$$

Električno in magnetno polje se sedaj lahko zapiše v naslednji obliki:

$$\vec{E} = i\omega \left(\vec{\mathcal{L}}\psi + \frac{1}{k} \nabla \times \vec{\mathcal{L}}\chi \right) e^{-i\omega t}, \quad (11)$$

$$\vec{B} = i\omega \left(\nabla \times \vec{\mathcal{L}}\psi + \frac{1}{k} \nabla \times \left(\nabla \times \vec{\mathcal{L}}\chi \right) \right) e^{-i\omega t}. \quad (12)$$

Enačbi se da z nekaj matematične spretnosti in s prehodom na krogelne koordinate zapisati v poenostavljeni obliki. Gradient se izrazi z $\vec{\mathcal{L}}$ in odvodom v radialni smeri (tu uvedemo $\hat{n} = \vec{r}/r$). Nato pa z upoštevanjem lastnosti polja in z uvedbo kompleksne funkcije $\Psi = \mathcal{R}e[\psi] + i\mathcal{I}m[\chi]$ električno in magnetno polje zapišemo kot:

$$\vec{E} = \mathcal{R}e \left[i\omega \vec{\mathcal{L}}\Psi - \omega \hat{n} \times \vec{\mathcal{L}}\Psi \right], \quad (13)$$

$$c\vec{B} = \mathcal{R}e \left[i\omega \hat{n} \times \vec{\mathcal{L}}\Psi + \omega \vec{\mathcal{L}}\Psi \right]. \quad (14)$$

Velja, da sta električno in magnetno polje v veliki oddaljenosti od izvora gotovo ortogonalna na radialno smer. Prav tako sta med seboj pravokotna, saj velja $c\vec{B} = \hat{n} \times \vec{E}$. Polje določata samo realna komponenta ψ in imaginarna komponenta χ , zato prej uvedena kompleksna funkcija Ψ povsem določa sevalno polje s poljubno polarizacijo.

Bolj podrobna izpeljava in razlaga manjkajočih korakov je v skripti prof. A. Čadeža - Teorija gravitacije([1]).

3 Postopek in rezultati

Imamo torej kompleksno funkcijo, ki popolnoma določa realno elektromagnetno polje:

$$\Psi = A(\cos \gamma e^{i\Delta} \mathcal{R}e[Y_{lm}(\Theta, \phi)] + \sin \gamma e^{-i\Delta} \mathcal{I}m[Y_{lm}(\Theta, \phi)]) h_l^{(1)}(kr) e^{-i\omega t}.$$

Krogelne funkcije $Y_{lm}(\theta, \phi)$ točno določata kvantni števili l in m . Število l prav tako določa Hanklovo funkcijo $h_l^{(1)}(kr)$, ki je prvega reda, kar pomeni, da se valovanje širi navzven. Imamo še A , ki je poljubna realna konstanta in člen, ki nam določa nihanje $e^{-i\omega t}$. Prosta parametra γ in Δ spreminjata polje in naloga je poiskati kako.

Enačbi (9) in (10) jasno povesta kako se iz naše podane funkcije izračuna električno in magnetno polje. Začne se z izračunom člena $\vec{\mathcal{L}}\Psi$, za kar najprej potrebujemo operator vrtilne količine $\vec{\mathcal{L}} = (L_x, L_y, L_z)$. Krogelne funkcije $Y_{lm}(\theta, \phi)$ so lastne funkcije L_z komponente vrtilne količine. $L_x Y_{lm}(\theta, \phi)$ in $L_y Y_{lm}(\theta, \phi)$ so lastne funkcije \mathcal{L}^2 in ne L_z . Zaradi tega je potrebno vpeljati $L_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(L_x \pm L_y)$, ki pa so lastne funkcije L_z . Bolj podrobno so lastnosti lastnih funkcij opisane v [1]. Prvo in drugo komponento operatorja vrtilne količine lahko izrazimo z L_+ in L_- in dobimo:

$$\vec{\mathcal{L}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(L_+ + L_-), \frac{-i}{\sqrt{2}}(L_+ - L_-), L_z \right). \quad (15)$$

Na tem mestu lahko L_{\pm} in L_z izrazimo s krogelnimi koordinatami:

$$L_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (16)$$

$$L_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (17)$$

Sedaj imamo vse potrebno za izračun električnega in magnetnega polja. Izračune in celotno delo sem opravil v programu Wolfram Mathematica 6.0.

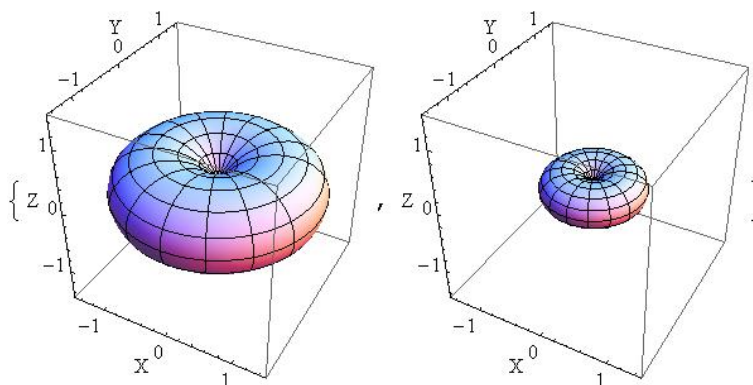
Najprej sem pogledal kakšen je energijski tok elektromagnetnega polja, ki ga dobimo iz dane funkcije. Izračunal sem Poyntingov vektor:

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \mathcal{R}e(\vec{E}) \times (\hat{n} \times \mathcal{R}e(\vec{E})) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \hat{n} \vec{E} \cdot \vec{E}^*, \quad (18)$$

kjer sta izpuščena člena $\vec{E} \cdot \vec{E}$ in $\vec{E}^* \cdot \vec{E}^*$, saj je njuno časovno povprečje enako nič. Na koncu sem dobil $\vec{\mathcal{P}}_{lm}(\theta, \phi, \gamma, \Delta)$, ki sem ga narisal v Mathematici s funkcijo *ParametricPlot3D*.

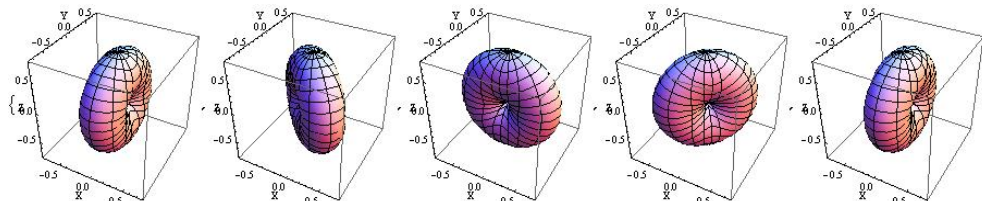
3.1 Odvisnost energijskega toka od γ in Δ

Za primer $l = 1, m = 0$ (slika 1) dobim dokaj preprosto funkcijo, ki ima kosinusno odvisnost od γ in je popolnoma neodvisna od parametra Δ .



Slika 1: Na sliki je energijski tok elektromagnetnega polja za $l = 1, m = 0$ pri $\gamma = 0$ (levo) in $\gamma = \pi/4$ (levo) in je neodvisen od Δ .

Bolj zanimiv primer je $l = 1, m = 1$, kjer je energijski tok bolj kompleksna funkcija γ in Δ , zato jo je potrebno obravnavati bolj sistematično. Najprej na sliki 2 vidimo kaj se dogaja če spreminjam le parameter γ od 0 do π s korakom $\pi/4$ in je parameter Δ enak nič. Torej s spreminjanjem γ ,



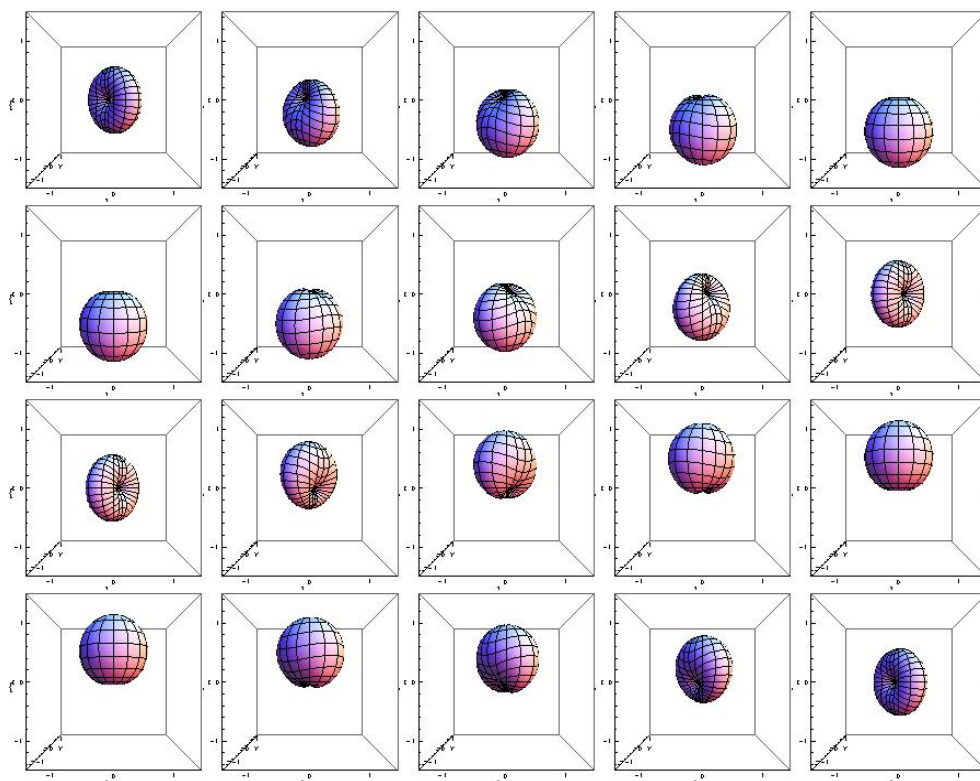
Slika 2: Primer $l = 1, m = 1$. Pri fiksnem Δ s spreminjanjem γ povzročamo vrtenje sevalnega polja okoli z osi. Na slikah se γ spreminja od leve proti desno od 0 do π s korakom $\pi/4$.

pri konstantnem Δ , povzročamo vrtenje sevalnega polja okoli z osi.

Bolj zanimiv je primer, ko spreminjamo parameter Δ . Pri vrednostih parametra $\gamma = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathcal{Z}$ so enačbe sevalnega polja vedno neodvisne

od parametra Δ . Pri vmesnih vrednostih pa dobimo zanimive rezultate. Najbolj izrazito spreminjanje polja, pri spreminjanju parametra Δ , dobimo pri vrednostih $\gamma = k\frac{\pi}{4}, k \in \mathcal{Z}$. To je prikazano na sliki 3. Parameter Δ se spreminja od leve proti desni vedno s korakom $\pi/16$. V prvi vrsti gre od 0 do $\pi/4$, v drugi od $\pi/4$ do $\pi/2$ in tako dalje do π .

Razvidno je, da Δ bolj kompleksno vpliva na sevalno polje. Najprej se opazi, da se sevalno polje usmeri k preferenčni osi in ob določenih pogojih seva le v z smeri, oziroma le v $-z$ smeri. Parameter Δ pa ne vpliva le na preferenčno smer sevanja, ampak tudi zavrti sevalno polje po z osi npr. polja pri $\pi/4$ in $\pi/2$ sta zavrtena ravno za $\phi = \pi/2$.

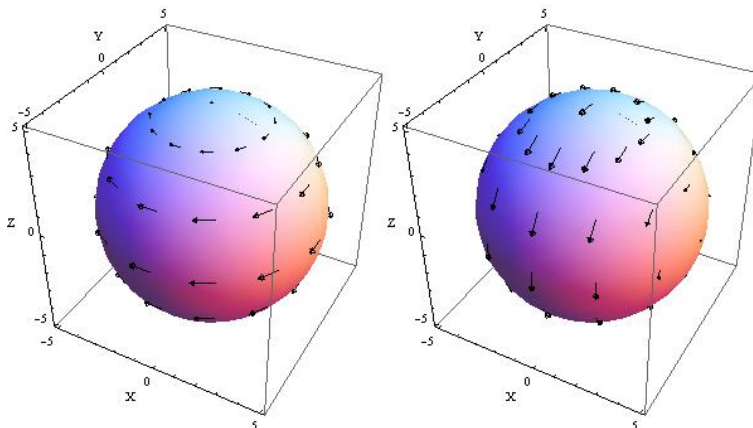


Slika 3: Primer $l = 1, m = 1$. Pri fiksnem $\gamma = \pi/4$ se v prvi vrsti Δ spreminja med $[0, \pi/4]$ s korakom $\pi/16$, v drugi vrsti med $[\pi/4, \pi/2]$ in tako dalje do π .

3.2 Odvisnost polarizacije od γ in Δ

Odvisnost polarizacije od parametrov γ in Δ sem preučil po naslednjem postopku. Električno polje sem izračunal tako kot v prejšnjem poglavju. Dobil sem torej realno vektorsko električno polje, ki je odvisno od parametrov γ in

Δ . V določenih točkah prostora sem izračunal vektor električnega polja pri določenih parametrih in ga nato narisal s funkcijo *ListVectorFieldPlot3D*. Levo na sliki 4 je prikazano električno polje za $l = 1, m = 0$ in desno za $l = 1, m = 1$, pri obeh sta parametra γ in Δ enaka nič. Pri električnem

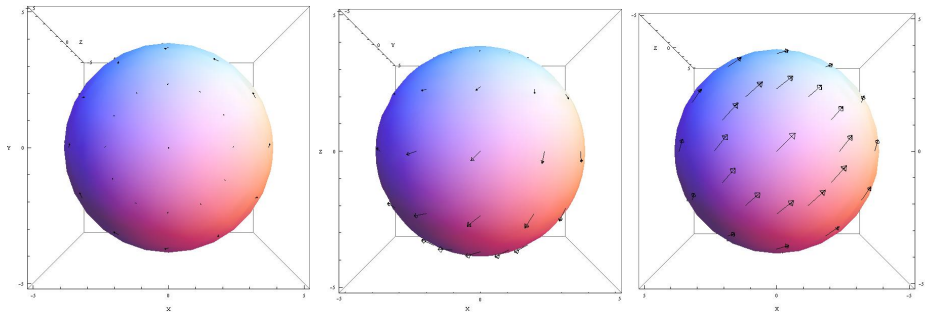


Slika 4: Levo je električno za $l = 1, m = 0$, desno pa za $l = 1, m = 1$. Oba parametra γ in Δ sta enaka nič.

polju za $l = 1, m = 0$ se vidi, da v smeri z ni polja, kar pa se sklada s sliko energijskega toka za ta isti primer. Tako vidimo, da je električno polje po velikosti in smeri urejeno v kolobarjih, kar pa se ujema s sliko energijskega toka.

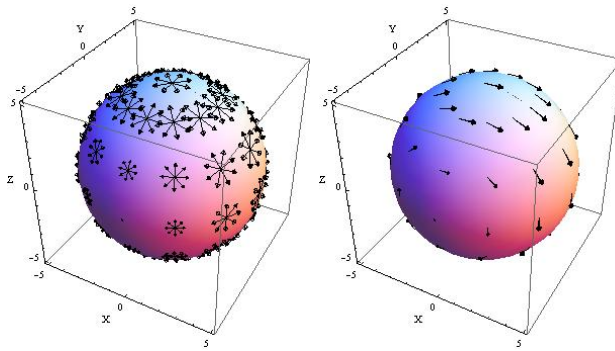
Enako kot prej je bolj zanimiv primer $l = 1, m = 1$. Če spreminjam samo parameter γ pridem do istih zaključkov kot prej, da polje samo rotira okoli z osi. S spreminjanjem parametra γ in Δ je enako kot prej, pri vrednostih $\gamma, \Delta = \pi/4$ je polje usmerjeno le v smeri $-z$. To je prikazano na sliki 5. Od leve proti desni si sledijo pogledi od zgoraj, iz strani in od spodaj. Pogled od zgoraj nam pokaže da v tej smeri ni električnega polja, pogled iz strani nam da videti, da se polje iz smeri od zgoraj navzdol povečuje. Pogled od spodaj pa nam jasno pokaže, da je tu polje največje.

V našem električnem polju je tudi časovna komponenta, katera je bila do sedaj nič. Če spreminjamo to časovno komponento in opazujemo kaj se dogaja s poljem na istem mestu, vidimo kako je polje polarizirano. To sem predstavil tako, da sem ob vsakem času izračunal električno polje in ga narisal na kroglo. Risal sem na isti graf in tako je vsaka puščica prikaz električnega polja ob določenem času na istem mestu. Levo na sliki 6 je polarizacija električnega polja pri parametrih $\gamma = \pi/2, \Delta = 0$ in $\omega = 1$. Dobro je vidno da je polarizacija krožna. Tu je pomembna tudi frekvenca



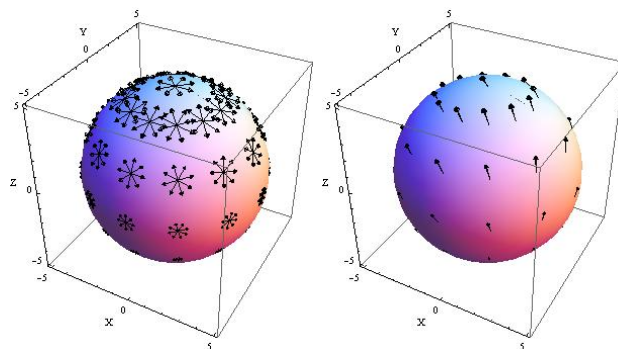
Slika 5: Levo je električno za $l = 1, m = 0$, desno pa za $l = 1, m = 1$. Oba parametra γ in Δ sta enaka nič.

nihanja. Ko se le ta zmanjša na npr. $\omega = 0.01$ dobimo pri istih pogojih (γ, Δ) linearno polarizirano električno poje. To je predstavljeno desno na sliki 6.



Slika 6: Polarizacija je pri parametrih $\gamma = \pi/2, \Delta = 0$ in $\omega = 1$ krožna (levo). Pri majhni $\omega = 0.01$ le ta postane linearna

Podobno obnašanje opazimo pri pogojih $\gamma = \pi/4, \Delta = 3\pi/4$ (slika 7). To je že znano polje, vendar je nasprotno kot prej (slika 5, $\Delta = \pi/4$) usmerjeno le navzgor v smeri z osi. Vidimo da je tudi tu polarizacija krožna, vse dokler ne zmanjšamo frekvence (desno na sliki 7).



Slika 7: Polarizacija je pri parametrih $\gamma = \pi/4$, $\Delta = 3\pi/4$ in $\omega = 1$ krožna(levo). Pri majhni $\omega = 0.01$ le ta postane linearna(desno)

Literatura

- [1] A.Čadež, *Teorija gravitacije* (2010).