

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za fiziko

Domača naloga iz gravitacije

Gravitacijsko lečenje

Anja Lautar
Astronomsko-geofizikalna smer

Avgust, 2010

Kazalo

1	Naloga	3
2	Uvod	3
3	Teorija	3
3.1	Odklonski kot	3
3.2	Lečenje na galaktičnem haloju	5
3.3	Enačba leče	6
4	Analiza rezultatov	8

1 Naloga

Porazdelitev snovi (v glavnem temne) v galaktičnem haloju je približno sferno simetrična in jo opisuje Hernquistova funkcija $M(R) = M_{halo}R^2/(R+a)^2$, pri čemer je M_{halo} celotna masa galaktičnega haloja, a pa velikostna skala. Za našo Galaksijo je $M_{halo} \approx 10^{12}M_{Sonce}$, $a \approx 22\text{kpc}$. Vzemi, da je naša Galaksija tipična galaksija in konstruiraj slike zelo oddaljene eliptične galaksije tipa E0, ki bi nastale, če bi bil med eliptično galaksijo in nami tipičen galaktični halo na oddaljenosti 1 Gpc. Izračunaj te slike za več različnih kotnih razdalj med eliptično galaksijo in galaktičnim halojem.

2 Uvod

Leta 1979 so Walsh, Carswell in Weymann opazili par kvazarjev z enakim rdečim premikom in sicer okrog 1.6, ki sta bila oddaljena le $6''$. Podobnost v spektrih kvazarjev je sugerirala, da je to en kvazar, razdeljen na dve sliki zaradi odklona svetlobe v gravitacijskem polju masivnega telesa, mimo katerega je svetloba morala iti na poti proti Zemlji. Domneva je bila potrjena z odkritjem galaksije z rdečim premikom 0.36 v smeri med slikama kvazarja. Šlo je za kvazar, ki ga sedaj poznamo pod imenom Q0957+561.

Gravitacijske leče so bile teoretično proučevane že pred tem. Danes poznamo mnogo gravitacijskih leč. Večinoma so to eliptične galaksije, kot tudi jata galaksij, ki v splošnem izvor lečijo v obliki loka. Gravitacijsko lečenje se uporablja za iskanje temnih objektov, raziskovanje strukture jat galaksij in merjenje Hubblove konstante.

3 Teorija

3.1 Odklonski kot

V večini primerov lečenja je velikost leče veliko manjša od dimenzij celotnega sistema. Pot svetlobe od izvora do opazovalca lahko razdelimo na tri dele:

- 1) med izvorom in lečo privzamemo nemoten raven prostor-čas
- 2) v bližini leče se svetloba odkloni
- 3) do opazovalca zopet potuje po nemotenem prostor-času.

V bližini leče se metrični tenzor prepiše v [1]:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\Phi}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - \frac{2\Phi}{c^2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1 - \frac{2\Phi}{c^2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1 - \frac{2\Phi}{c^2}) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Pristop je upravičen, če je gravitacijski potencial Φ majhen ($|\Phi| \ll c^2$), kar je v praktično vseh primerih lečenja res.

Do poti žarka pridemo s pomočjo Hamiltonovega principa. Ta pravi, da prost delec med dvema točkama potuje po najkrajši poti, oziroma geodetki. Položaj fotona označimo z

$$x^\mu = (ct, x, y, z) \quad (2)$$

in zapišemo variacijo akcije S :

$$\delta S = \delta \int_{x_1^\mu}^{x_2^{\mu u}} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\sigma = \delta \int_{x_1^\mu}^{x_2^{\mu u}} L(x^\mu, \dot{x}^\mu, \sigma) d\sigma = 0. \quad (3)$$

S σ smo parametrizirali pot delca in $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma}$. Pokazati se da, da vsak Lagrangian L' , ki je funkcija Lagrangiana L vodi do enake poti delca [2]. Iz tega razloga je v nadaljevanju upravičena uporaba $L' = \frac{1}{2}L^2$, ki poenostavi izraze. Enačbo geodetke nam podajajo Euler-Lagrangeove enačbe, ki se ob upoštevanju sumacijskega pravila zapišejo:

$$\frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\nu - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\nu = 0. \quad (4)$$

Če tangento na pot delca označimo z $u^\mu = (u^0, \vec{u}) = \frac{dx^\mu}{d\sigma} = \dot{x}^\mu$ in upoštevamo enačbo (1), za komponento $\mu = 0$ dobimo:

$$\frac{d}{d\sigma} \left(u^0 \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) \right) = 0 \quad (5)$$

iz česar razberemo, da je u^0 v ničtem redu konstanta gibanja. Za krajevne koordinate $\mu = i$ dobimo:

$$- \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2} \right) \frac{du^i}{d\sigma} + \frac{2}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} u^j u^i - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} u^\nu u^\nu = 0, \quad (6)$$

kjer indeks j označuje le krajevne koordinate četverca. Da bi prišli do izraza za odklonski kot moramo upoštevati še naslednje premisleke:

- za svetlobni žarek velja $ds = \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\sigma = 0$. Iz tega sledi, da je v ničtem redu $(u^0)^2 = |\vec{u}|^2$, ter

$$u^\nu u^\nu = (u^0)^2 + |\vec{u}|^2 = 2|\vec{u}|^2. \quad (7)$$

- krajevni dolžinski element poti žarka pišemo kot

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} d\sigma = |\vec{u}| d\sigma, \quad (8)$$

ter zamenjamo odvod po σ z

$$\frac{dl}{d\sigma} \frac{d}{dl} = |\vec{u}| \frac{d}{dl}. \quad (9)$$

- pišemo $\vec{u} = |\vec{u}|\vec{e}$, kjer je \vec{e} enotski vektor v smeri \vec{u} .

S pomočjo teh razmislekov enačbo (6) prepišemo v vektorsko obliko:

$$\frac{d\vec{e}}{dl} = \frac{2}{c^2}(\vec{e} \cdot \vec{\nabla}\Phi)\vec{e} - \frac{2}{c^2}\vec{\nabla}\Phi = -\frac{2}{c^2}\vec{\nabla}_\perp\Phi. \quad (10)$$

Ker je člen $(\vec{e} \cdot \vec{\nabla}\Phi)\vec{e}$, ravno komponenta gradienta v smeri vektorja \vec{e} ostane le komponenta gradienta, ki je pravokotna na \vec{e} , katero smo označili z $\vec{\nabla}_\perp$. Z integracijo po l izpeljemo enačbo odklonskega kota:

$$\vec{\alpha} = \frac{2}{c^2} \int \vec{\nabla}_\perp\Phi dl. \quad (11)$$

Ker je v praktično vseh primerih odklonski kot zelo majhen, lahko uporabimo Bornovo aproksimacijo iz teorije sipanja. Integracijo po dejanski odklonjeni poti žarka zamenjamo z integracijo po poti neodklonjenega žarka z vpadnim parametrom b (slika 1 levo).

3.2 Lečenje na galaktičnem haloju

Porazdelitev snovi v galaktičnem haloju je opisana s Hernquistovo funkcijo:

$$M(R) = \frac{M_{halo}R^2}{(R+a)^2} \quad (12)$$

ki ji ustreza potencial [3]

$$\Phi(R) = -\frac{GM_{halo}}{R+a}. \quad (13)$$

To za odklonski kot po enačbi (11) da

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{c^2} \int \vec{\nabla}_\perp\Phi dl = \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial R_\perp}\Phi dR_\parallel \\ &= \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{GM_{halo}R_\perp}{\sqrt{R_\perp^2 + R_\parallel^2} \left(\sqrt{R_\perp^2 + R_\parallel^2} + a \right)^2} dR_\parallel \\ &= \frac{2GM_{halo}R_\perp}{c^2} \left[\frac{2\sqrt{R_\perp^2 - a^2} - a\pi + 2a \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{R_\perp^2 - a^2}}\right)}{(R_\perp^2 - a^2)^{3/2}} \right] \\ &= \alpha(R_\perp). \end{aligned} \quad (14)$$

Vidimo, da je odklonski kot odvisen le od razdalje med fotonom in masivnim telesom, ki je pravokotna na smer opazovalec-leča.

3.3 Enačba leče

Geometrijo lečenja vidimo na sliki 1 desno. Ker so razdalje med izvorom, lečo in opazovalcem zelo velike v primerjavi s fizično velikostjo leče lahko lečo aproksimiramo s porazdelitvijo mase v ravnini. Optično os, ki je na sliki 1 označena s črtkano črto, definiramo kot pravokotnico na ravnino leče in zveznico z opazovalcem. Izvor leži na kotni razdalji $\vec{\beta}$ od optične osi, zaradi odklona žarka za kot $\vec{\alpha}$ pa opazovalec vidi sliko izvora na kotnem položaju $\vec{\theta}$. Če so omenjeni koti majhni iz geometrijske konstrukcije dobimo ¹:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{D_I}{D_L}\zeta - D_{LI}\alpha(\zeta), \\ \theta &= \frac{\zeta}{D_L}, \\ \beta &= \frac{\eta}{D_I} = \frac{\zeta}{D_L} - \alpha(\zeta)\frac{D_{LI}}{D_I},\end{aligned}\tag{16}$$

oziroma

$$\beta = \theta - \alpha(\theta)\frac{D_{LI}}{D_I},\tag{17}$$

kar je enačba leče. Vektorske znake smo opustili, ker zaradi aksialne simetrije niso več potrebni.

Člen $\alpha(\theta)\frac{D_{LI}}{D_I}$ s pomočjo enačbe (14) prepisemo v

$$\begin{aligned}\alpha(\theta)\frac{D_{LI}}{D_I} &= \frac{\theta_E^2}{\theta} \left[\frac{\sqrt{1-r(\theta)^2} + r(\theta)(\arctan(r(\theta)/\sqrt{1+r(\theta)^2}) - \pi/2)}{(1-r(\theta)^2)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{\theta_E^2}{\theta} f(\theta)\end{aligned}\tag{18}$$

kjer je

$$r = r(\theta) = \frac{a}{\theta D_L}\tag{19}$$

in θ_E Einsteinov radij, ki podaja skalo efekta lečenja:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM_{halo}D_{LI}}{c^2D_LD_I}}.\tag{20}$$

¹V ukrivljenih prostorih ne velja Evklidova geometrija, zato luminoznostne razdalje zamenjamo s kotno oddaljenostjo, da ohranimo zvezo in enačbo leče. Kotne oddaljenosti so definirane kot $D_L + D_{LI} \neq D_I$ in niso več aditivne. r_i predstavlja radialno oddaljenost objekta i od opazovalca in $a(t_i)$ je *scale factor* ob času t_i , ko žarek zapusti objekt i . *Scale factor* je definiran kot $1 + z = \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{a_0}{a(t)}$, kjer je z rdeči premik, ν_0 frekvenca fotona, ν frekvanca fotona ob trenutku, ko je bil izsevan, a_0 *scale factor* v sedanji epohi, ter $a(t)$ *scale factor* v trenutku, ko je bil foton izsevan. V sedanji epohi je $a_0 = 1$, iz česar dobimo zvezo med rdečim premikom in *scale factorom* v trenutku ko je bil foton izsevan:

$$a(t) = \frac{1}{1+z}.\tag{15}$$

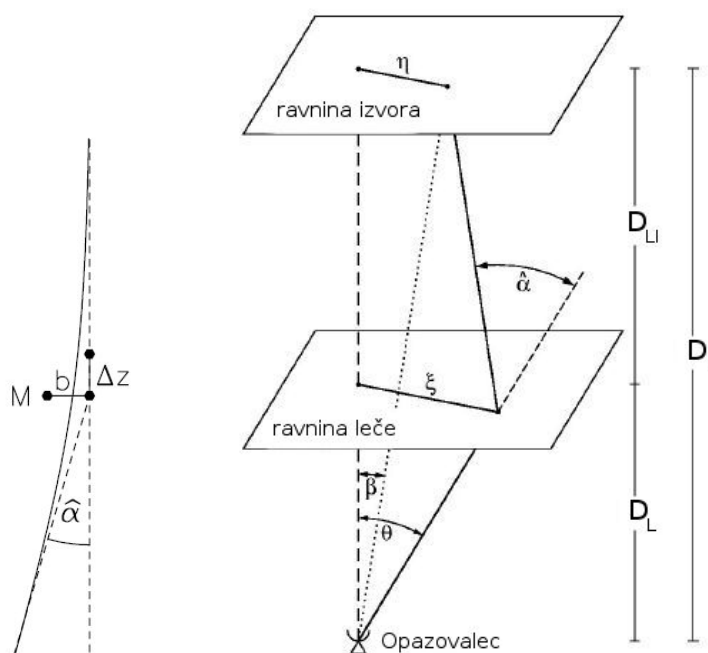
Upoštevajoč enačbi (14) in (18) prepisemo enačbo leče v obliko

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta} f(\theta), \quad (21)$$

kjer je

$$f(\theta) = \left[\frac{\sqrt{1 - r(\theta)^2} + r(\theta)(\arctan(r(\theta)/\sqrt{1 + r(\theta)^2}) - \pi/2)}{(1 - r(\theta)^2)^{3/2}} \right] \quad (22)$$

Enačba leče (21) je nelinearna. Rešila sem jo numerično v Wolfram Mathematici 7.0 s pomočjo ukaza *FindRoot*, ki išče numerične rešitve funkcije z začetkom v podani začetni vrednosti. Pri izbiri začetnih vrednosti moramo biti nekoliko pazljivi, ker z napačno izbiro dobimo le eno sliko izvora. Tako sem dobila odvisnost $\theta(\beta)$, oziroma sliko izvora za različne kote med lečo in izvorom.



Slika 1:

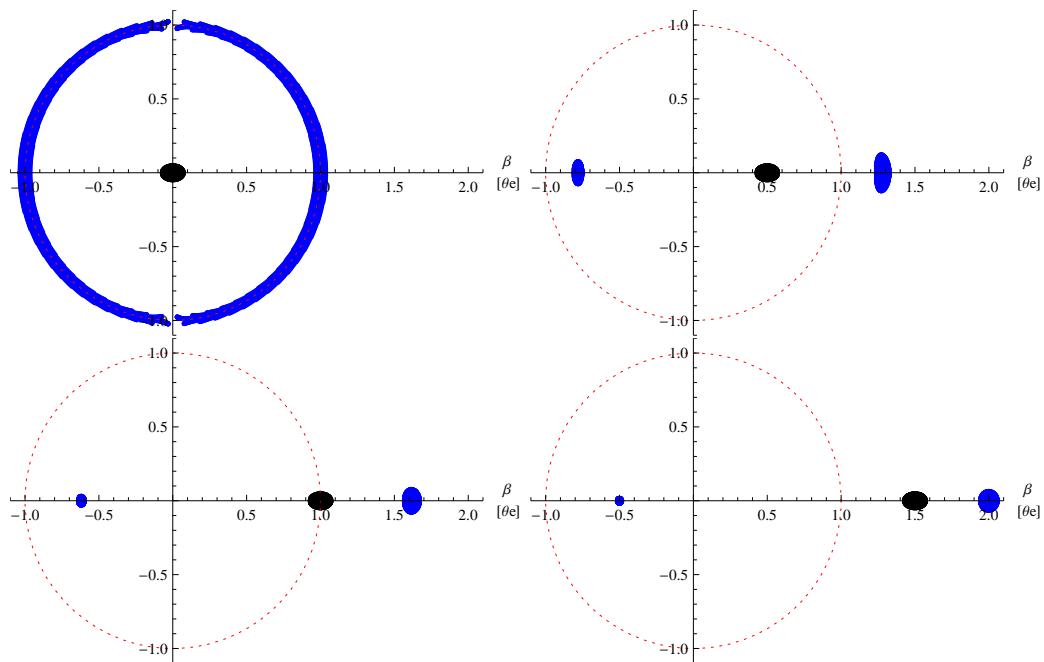
[LEVO]: Bornova aproksimacija.

[DESNO]: Geometrija lečenja.

Leča je pri rdečem premiku z_L , ki ustreza kotni oddaljenosti D_L . Izvor se nahaja pri kotni oddaljenosti D_I . Če bi svetloba potovala po premici bi opazovalec izvor in lečo videl pod kotom β , zaradi odklona žarkov v bližini leče za kot α je pa kot med lečo in sliko izvora θ .

4 Analiza rezultatov

Slika 2 prikazuje izvor, Einsteinov radij, ter sliko (oziroma sliki) izvora po lečenju na masi, katere porazdelitev opiše Hernquistova funkcija. Izvor je na oddaljenosti 4 Gpc, leča pa na 1 Gpc. Kot med lečo in izvorom povečujemo. Na prvi sliki se izvor nahaja natančno za lečo in njegova slika ustreza Einsteinovemu obroču, ki je na drugih slikah označen z rdečo pikčasto krožnico. Če izvor ni natančno za lečo dobimo dve sliki izvora, ki sta ločeni za približno $2\theta_E$. Večji ko je kot med lečo in izvorom, krajši so loki, ki predstajajo sliko izvora.



Slika 2:

Izvor (črno), slika (sliki) izvora (rumeno), ter Einsteinov radij (rdeče pikčasto) za različne kote med izvorom in lečo. Kot med izvorom in lečo je v enotah Einsteinovega radija. Le če je izvor natančno za lečo dobimo eno sliko, ta pa ustreza Einsteinovemu obroču. Če izvor ni natančno za lečo za sliko dobimo dva loka, ki postajata vse krajša z večanjem kota med lečo in izvorom.

Literatura

- [1] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, 1971, (W.H. Freeman and Company)
- [2] A. Čadež, *Teorija gravitacije*, skripta predavanj, 2010
- [3] T. Sumi, K. V. Johnston, S. Tremaine, D.N. Spergel, S.R. Majewski, *Probing the Galactic Potential with Next'Generation Observations of Disk Stars*, arXiv:0903.4002v2 (2009)
- [4] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, 2008