Astrofizikalni projekt

Jure Oder

17. maj 2007

1 Navodilo

Tlak v zvezdi je vsota prispevkov dinamičnega tlaka plina in sevalnega tlaka. Vzemi, da je vsota entropij obeh prispevkov na enoto mase po vsej zvezdi konst. Zapiši enačbe zvezdne strukture za take zvezde in jih numerično reši (Mathematica,…). Opiši rešitve in jih primerjaj s klasičnimi politropami.

2 Izpeljava modela

Za začetek izpeljimo vse enačbe, ki jih bomo potrebovali v nastavljanju modela. Želeli bi, da bi bile vse enačbe v brezdimenzijski obliki.

2.1 Enačbe v brezdimenzijski obliki

2.1.1 Enačba stanja

Kot prvo enačbo zapišimo enačbo stanja. V navodilu je zapisano, da je tlak plina sestavljen tako iz tlaka normalnega plina, kot tudi iz tlaka, ki ga povzročajo fotoni. Celoten tlak takšnega plina je seštevek obeh tlakov. Enačba stanja je potem

$$P = \frac{\varrho k T}{\mu m_H} + \frac{1}{3} a T^4. \tag{1}$$

Tukaj P stoji za tlak, T za temperaturo, ϱ pa za gostoto plina. k je Boltzmannova konstanta, m_H masa vodika, μ povprečna molekulska masa, a pa je povezan s Stefanovo konstanto.

Vpeljimo brezdimenzijske spremenljivke s pomočjo vrednosti v središču takšne zvezde:

$$P = P_c p; \qquad \varrho = \varrho_c \rho; \qquad T = T_c \tau.$$

Če s tem ustrezno obdelamo enačbo stanja (1), dobimo enačbo stanja v brezdimenzijski obliki:

$$p = \alpha \rho \tau + \beta \tau^4.$$

Pri tem sta parametra α in β:

$$\alpha = \tfrac{\varrho_c k T_c}{\mu m_H P_c}; \qquad \beta = \tfrac{a T_c^4}{3 P_c}.$$

Vendar to nista neodvisna parametra. Tako kot smo izbrali spremenljivke, mora v zvezdi veljati

$$\alpha + \beta = 1.$$

Oba parametra sta tudi pozitivna, zato je njuna vrednost omejena na zaprtem intervalu od 0 do 1.

Tako imamo za enačbo stanja v brezdimenzijski obliki kar enačbo

$$p = \alpha \tau (\rho - \tau^3) + \tau^4. \tag{2}$$

2.1.2 Hidrostatska in enačba porazdelitve mase

Kot naslednji korak pri izpeljavi modela, obravnavamo zvezdo, ki je v hitrostatičnem ravnovesju in ki je krogelno simetrična. Za tako zvezdo velja enačba hidrostatskega ravnovesja:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{Gm}{r^2}\varrho. \tag{3}$$

Tukaj nastopa spremenljivka r kot radij od središča zvezde, m pa masa ki je zajeta v tem radiju r.

Za porazdelitev mase velja enačba

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2\varrho. \tag{4}$$

Sedaj iz enačbe (3) izrazimo maso in jo vstavimo v enačbo (4). Pri tem uporabimo prej vpeljane brezdimenzijske količine in tako dobimo

$$-\frac{P_c}{4\pi G\varrho_c^2}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right) = \rho. \tag{5}$$

Sedaj uvedemo še brezdimenzijski radij ξ

$$r = r_0\xi,$$

kjer je

$$r_0 = \sqrt{\frac{P_c}{4\pi G\varrho_c^2}}$$

ter prepišemo zgornjo enačbo v

$$-\frac{1}{\xi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{\xi^2}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\xi}\right) = \rho. \tag{6}$$

Izpeljava te enačbe je popolnoma analogna, kot je pri politropnem modelu.

2.1.3 Diferencial energije, energija

Diferencial energije na enoto mase zapišemo v naslednji obliki:

$$\mathrm{d}\upsilon = T\mathrm{d}\sigma - P\mathrm{d}\left(\frac{1}{\varrho}\right). \tag{7}$$

Tu υ stoji za energijo na enoto mase, σ pa za entropijo na enoto mase.

To enačbo spet prevedemo v brezdimenzijsko obliko, tako da uvedemo značilno energijo in značilno entropijo:

$$\upsilon = \upsilon_0 u; \qquad \sigma = \sigma_0 s.$$

Značilno energijo υ_0 nastavimo na P_c/ϱ_c in značilno entropijo σ_0 na $T_c\upsilon_0$ ter tako dobimo naslednjo zvezo

$$\mathrm{d}u = \tau\mathrm{d}s + \frac{p}{\rho^2}\mathrm{d}\rho. \tag{8}$$

Notranjo energijo na enoto mase takega plina zapišemo kot vsoto prispevkov notranje energije na enoto mase navadnega plina in plina fotonov na enoto mase:

$$\upsilon = C_V T + \frac{a}{\varrho}T^4 \tag{9}$$

Tukaj C_V stoji za specifično toploto na enoto mase pri konstantnem volumnu. To je za sistem, kjer ne vnašamo nove mase, kar enako specifični toploti pri konstantni gostoti.

Specifično toploto na enoto mase dobimo iz specifične toplote. Ta za monoatomni plin znaša $3Nk/2$, kjer pa je N število delcev. Specifično toploto na enoto mase, pa dobimo tako da delimo z maso celotne zvezde, ki je $N\mu m_H$.

Z upoštevanjem prejšnjih vpeljav, lahko enačbo (9) predelamo v naslednjo obliko:

$$u = C_V \frac{\varrho_c T_c}{P_c}\tau + 3(1-\alpha)\frac{\tau^4}{\rho}.$$

Sedaj spet vpeljemo novo brezdimenzijsko količino C_ρ, tako da je prvi člen kar enak $\alpha C_\rho \tau$. S tem dobimo enačbo za energijo v brezdimenzijski obliki:

$$u = \alpha C_\rho \tau + 3(1-\alpha)\frac{\tau^4}{\rho}. \tag{10}$$

Seveda pa, ker je specifična toplota na enoto mase monoatomnega plina kar $\frac{3}{2}\frac{k}{\mu m_H}$, je potem C_ρ kar enak 3/2.

Ti dve enačbi bomo potrebovali v naslednjem podpoglavju, kjer bomo izpeljali zvezo med temperaturo τ in gostoto ρ za zvezdo katere entropija je konstantna.

2.2 Konstantna entropija na enoto mase

Zdaj, ko imamo vse enačbe, ki jih bomo potrebovali v brezdimenzijski obliki, se lahko lotimo naslednjega koraka. Poglejmo, kaj nam lahko pove podatek o konstanti entropiji na enoto mase.

Za entropijo vemo, da je odvisna le od dveh spremenljivk, od gostote in temperature. Zaradi tega lahko njen diferencial zapišemo na naslednji način:

$$\mathrm{d}s = \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_\tau \mathrm{d}\rho + \left(\frac{\partial s}{\partial \tau}\right)_\rho \mathrm{d}\tau. \tag{11}$$

Sedaj pa se lotimo iskanja teh dveh parcialnih odvodov.

Izkaže se, da je drugi odvod zelo preprost in ga lahko najdemo takoj. Velja namreč, da je

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \tau}\right)_\rho = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)_\rho = \frac{\alpha C_\rho}{\tau} + 12(1-\alpha)\frac{\tau^2}{\rho}.$$

Da smo lahko prišli do tega, smo morali uporabiti enačbi (8) in (10).

Prvi odvod je malo težje poiskati, saj moramo za to napisati še eno funkcijo, ki je Legendrova transformacija notranje energije. Le–to dobimo tako, da notranji energiji na enoto mase odštejemo člen $s\tau$ in nato zapišemo diferencial te nove funkcije, ki ga označimo z $\mathrm{d}f$. Diferencial je po tem enak:

$$\mathrm{d}f = -s\mathrm{d}\tau + \frac{p}{\rho^2}\mathrm{d}\rho = \left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_\rho \mathrm{d}\tau + \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_\tau \mathrm{d}\rho.$$

Iz tega pa je že razvidno, kam ciljamo.

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_\tau = -\frac{\partial^2 f}{\partial \tau \partial \rho} = -\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_\rho.$$

Ta odvod pa zlahka poiščemo. Odvajamo enačbo stanja (2) in dobimo:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_\tau = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{4(1-\alpha)\tau^3}{\rho^2}.$$

Sedaj se s temi odvodi vrnemo v enačbo (11) ter upoštevamo, da se entropija ne spreminja. Tako dobimo diferencialno zvezo med temperaturo ter gostoto

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\tau}{\rho}\frac{\alpha\rho + 4(1-\alpha)\tau^3}{\alpha C_\rho \rho + 12(1-\alpha)\tau^3}\mathrm{d}\rho. \tag{12}$$

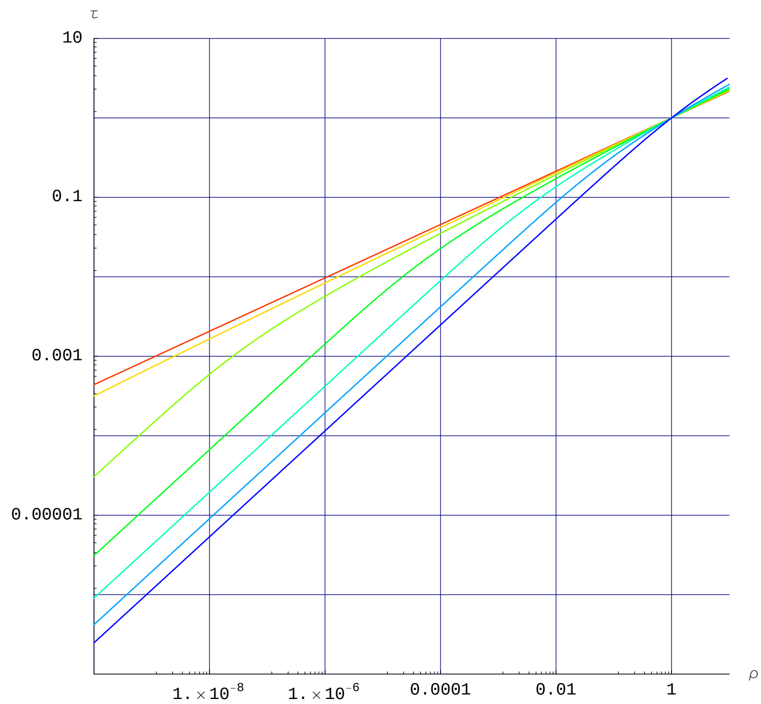
V tem je temeljna razlika med tem in politropnim modelom. Politropni model namreč privzame zvezo med temperaturo in gostoto[1], ki pa je drugačna od te diferencialne zveze.

[1]V literaturi se navaja, da se izbere zveza med tlakom in gostoto ($P = K\varrho^\gamma$), vendar pa velja tudi enačba stanja, ki je kar enačba za idealni plin. Tako v bistvu s to izbiro izberemo tudi zvezo med temperaturo in gostoto.

To diferencialno enačbo pa se da rešiti z nastavkom $\tau = K\rho^{\frac{1}{3}}$, kjer K ni konstanta. S tem nastavkom uspemo priti do rešitve

$$\tau = \rho^{\frac{1}{C_\rho}} \exp\left[\frac{4(1-\alpha)}{\alpha}\left(1-\frac{\tau^3}{\rho}\right)\right]. \tag{13}$$

Graf te funkcije za različne vrednosti α je prikazan na sliki 1.



Slika 1: Prikaz zveze (13) med gostoto in temperaturo pri konstantni entropiji. Vrednost parametra α raste od 0.05 do 0.95 po koraku 0.15 od krivulje v rdeči barvi, preko oranžne, zelene do modre (od zgoraj navzdol). V politropnem modelu (ki je izpeljan kasneje) bi ta graf bil šop premic, ki se sekajo v točki $\rho = 1$ ter $\tau = 1$.

2.3 Poskus analitične rešitve

Ker je znana zveza med temperaturo τ in gostoto ρ lahko poskusimo priti do analitične rešitve spreminjanje tlaka skozi zvezdo. Vendar je enačba (13) implicitna in ni možnosti, da bi katero od spremenljivk (temperaturo τ ali gostoto ρ) eksplicitno izrazili. Mogoče pa je izraziti obe, temperaturo in gostoto, z neko novo spremenljivko z. Najprej nastavimo $z = \tau/\rho^{1/3}$ in iz tega dobimo

$$\rho = \left(z^{C_\rho} \exp\left[\frac{4(1-\alpha)}{\alpha C_\rho}(z^3-1)\right]\right)^{\frac{3}{3-C_\rho}}$$

$$\tau = \left(z^3 \exp\left[\frac{4(1-\alpha)}{\alpha}(z^3-1)\right]\right)^{\frac{1}{3-C_\rho}}$$

Tako smo zgornjo enačbo zapisali v parametrični obliki.

S pomočjo teh dveh zvez, lahko skozi enačbo stanja (2) izrazimo tudi tlak le kot funkcijo spremenljivke z. Zaradi hidrostatske enačbe (enačba (6)) pristanemo tako na nelinearni navadni diferencialni enačbi drugega reda za spremenljivko z po radiju ξ oblike

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{N}{M} - \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}\right)\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 + \frac{2}{\xi}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\rho^2}{M} = 0, \tag{14}$$

kjer je

$$M = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}; \qquad\qquad N = \frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}z^2}$$

Tako pridemo do ugotovitve, da se do analitične rešitve spreminjanja parametra z v odvisnosti od koordinate ξ ne bomo mogli dokopati. Preostane nam numerična rešitev.

2.4 Numerična rešitev

Lahko bi numerično reševali enačbo (14) in prišli do numerične rešitve za $z(\xi)$. Iz te rešitve bi potem izračunali $\rho(z)$. Vendar je za numerično reševanje enačbe (14) potrebnih preveč stranskih računov. Zato uberemo drugačno pot.

Vemo, da se tako temperatura τ kot tudi gostota ρ spreminjata po zvezdi samo v odvisnosti od koordinate ξ. Zato lahko zapišemo totalna diferenciala teh dveh količin kot

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi \qquad\qquad \mathrm{d}\rho = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi$$

Tako te totalne diferenciale vstavimo v enačbo (12) in dobimo

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\tau}{\rho}\frac{\alpha\rho + 4(1-\alpha)\tau^3}{\alpha C_\rho \rho + 12(1-\alpha)\tau^3}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\xi}. \tag{15}$$

Sedaj z pomočjo enačbe stanja (2) ter hidrostatske enačbe (6) izpeljemo sistem diferencialnih enačb za numerično računanje gostote po zvezdi.

2.4.1 Izpeljava sistema diferencialnih enačb

Za izpeljavo sistem diferencialnih enačb vzamemo najprej enačbo (6) in uvedemo novo neznanko χ, tako da enačbo prepišemo v sistem (odvode po radiju ξ bomo od sedaj naprej označevali s $\ '$):

$$\begin{aligned} \chi' &= -\rho\xi^2 \\ p' &= \frac{\rho\chi}{\xi^2} \end{aligned}$$

Vendar potrebujemo odvod tlaka po zvezdi. Le–tega dobimo s pomočjo enačbe stanja (2).

$$p' = \alpha\tau\rho' + [\alpha\rho + 4(1-\alpha)\tau^3]\tau'.$$

Sedaj uporabimo še zvezo (15) med odvodom temperature in gostote, tako da bo v zgornji zvezi na desni strani nastopal samo odvod gostote:

$$p' = \frac{\alpha^2(1+C_\rho)\rho^2 + 20\alpha(1-\alpha)\rho\tau^3 + 16(1-\alpha)^2\tau^6}{\alpha C_\rho\rho + 12(1-\alpha)\tau^3}\frac{\tau}{\rho}\rho'.$$

Vstavimo to v zgornji sistem in dobimo:

$$\rho' = \frac{\alpha C_\rho\rho + 12(1-\alpha)\tau^3}{\alpha^2(1+C_\rho)\rho^2 + 20\alpha(1-\alpha)\rho\tau^3 + 16(1-\alpha)^2\tau^6}\frac{\rho^2\chi}{\tau\xi^2}.$$

Vidimo, da je odvod gostote odvisen od temperature, zato moramo v sistem vključiti tudi enačbo (15). Seveda to storimo tako, da vstavimo pravkar izpeljani odvod nazaj v enačbo (15). Zapisan celoten sistem se glasi:

$$\begin{aligned} \chi' &= -\rho\xi^2 \\ \rho' &= \frac{\alpha C_\rho\rho + 12(1-\alpha)\tau^3}{\alpha^2(1+C_\rho)\rho^2 + 20\alpha(1-\alpha)\rho\tau^3 + 16(1-\alpha)^2\tau^6}\frac{\rho^2\chi}{\tau\xi^2} \\ \tau' &= \frac{\alpha\rho + 4(1-\alpha)\tau^3}{\alpha^2(1+C_\rho)\rho^2 + 20\alpha(1-\alpha)\rho\tau^3 + 16(1-\alpha)^2\tau^6}\frac{\rho\chi}{\xi^2} \end{aligned} \tag{16}$$

Da lahko rešimo ta sistem enačb, moramo seveda poznati tudi začetne pogoje. Ti so sila preprosti. Zaradi izbranih brezdimenzijskih spremenljivk, mora veljati $\rho(0) = \tau(0) = p(0) = 1$. Zaradi hidrostatskega ravnovesja v središču zvezde pa mora veljati tudi $\rho'(0) = \tau'(0) = p'(0) = 0$. Iz tega lahko izpeljemo začetne pogoje za sistem

$$\chi(0) = 0; \qquad \rho(0) = 1; \qquad \tau(0) = 1 \tag{17}$$

Nekaj težav imamo z numeričnim izračunom odvodov v središču zvezde, ki pa jih je analitično preprosto izračunati:

$$\chi'(0) = 0; \qquad \rho'(0) = 0; \qquad \tau'(0) = 0 \tag{18}$$

Navedimo še nekaj zanimivih rezultatov. Ko numerično rešimo ta sistem enačb, lahko izračunamo tudi radij ξ_0 pri katerem gostota pade na 0. S to vrednostjo lahko izračunamo radij zvezde

$$R = \sqrt{\frac{P_c}{4\pi G \varrho_c^2}}\xi_1,$$

maso zvezde

$$M = -\sqrt{\frac{P_c^3}{4\pi G^3 \varrho_c^4}}\chi(\xi_1)$$

ter povprečno gostoto zvezde

$$\bar{\varrho} = -\varrho_c \frac{\chi(\xi_1)}{\xi_1^3}.$$

3 Izpeljava politropnega modela

Podobno kot zgornji model izpeljemo tudi politropni model. Enačba stanja v brezdimenzijski obliki tu, je preprosto kar

$$p = \rho\tau. \tag{19}$$

Pri tem modelu predpostavimo tako zvezo med temperaturo in gostoto, da velja

$$p = \rho^\gamma. \tag{20}$$

Ta zveza je brez konstantnega faktorja zaradi enakosti v središču zvezde.

Pri tem je γ odvisen tako od α, kot tudi od C_ρ, če vzamemo splošnejšo enačbo stanja in je po [1, str. 21] enak:

$$\gamma = B + \frac{(4-3B)^2(\gamma'-1)}{B + 12(1-B)(\gamma'-1)}.$$

Tukaj je γ' razmerje specifičnih toplot $\gamma' = (C_\rho + 1)/C_\rho$, B pa je

$$B = \frac{\alpha\rho\tau}{p}.$$

V politropnem modelu se predpostavi, da je γ konstanten po celotni zvezdi (s tem ko se predpostavi enačba stanja). Tako vzamemo za vrednost p, ρ in τ kar vrednosti v središču zvezde in zato je B kar enak α.

V še vedno veljavno enačbo (5) vstavimo (20). Še prej pa, zato da so enačbe lepše uvedemo novo spremenljivko:

$$\rho = \theta^n,$$

kjer je $n = 1/(\gamma - 1)$. Tako dobimo

$$-\frac{(n+1)P_c}{4\pi G \varrho_c^2}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\right) = -\theta^n.$$

Sedaj uvedemo še brezdimenzijski radij $\xi = r/r_0$, kjer je

$$r_0 = \sqrt{\frac{(n+1)P_c}{4\pi G \varrho_c^2}}$$

in smo končno na brezdimenzijski enačbi, ki se ji reče tudi *Lane–Emden–ova* enačba:

$$-\frac{1}{\xi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right) = \theta^n :$$

To enačbo potem prevedemo na sistem za numerično reševanje, tako da uvedemo novo spremenljivko. Zapišemo lahko kar celoten sistem

$$\theta' = u$$

$$u' = -\frac{2u}{\xi} - \theta^n \qquad (21)$$

$$(22)$$

Začetni pogoji za ta model so

$$\theta(0) = 1$$
$$u(0) = 0$$

Z začetnimi odvodi imamo tudi tukaj nekaj težav zato jih izračunamo analitično. Odvod $\theta'(0)$ je kar enak $u(0)$, torej 0. Drugega izračunamo s pomočjo druge enačbe v sistemu (21) ter L'Hospitalovega pravila izračunavanja limit:

$$\lim_{\xi\to 0} u' = -2\lim_{\xi\to 0}\frac{u}{\xi} - 1 = -2\lim_{\xi\to 0}\frac{u'}{1} - 1$$

iz česar pa sledi

$$\lim_{\xi\to 0} = -\frac{1}{3}.$$

Torej sta odvoda

$$\theta'(0) = 0$$
$$u'(0) = -\frac{1}{3}$$

Značilni radij r_0 se v tem modelu razlikuje od zgornjega modela za faktor $\sqrt{n+1}$. Še vedno, pa je enačba modela odvisna samo od dveh parametrov (α in C_ρ), oziroma od enega, če izvzamemo C_ρ.

4 Primerjava modelov

Če želimo primerjati modela, se je smiselno vprašati, kdaj bosta modela najbolj enaka. Se pravi, kako moramo izbrati parameter α, da se bosta modela najbolje ujemala[2]. To lahko poiščemo tako, da zapišemo diferencial entropije, za politropni model. Diferencial entropije, ki smo ga izpeljevali v enem od prejšnjih poglavij se glasi:

$$\mathrm{d}s = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)_\rho \mathrm{d}\tau - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_\rho \mathrm{d}\rho. \qquad (23)$$

Nismo še poiskali zveze med temperaturo in gostoto v politropnem modelu, vendar je to zelo preprosto. Vzamemo enačbi (20) in enačbo stanja (19) in dobimo, da je

$$\tau = \rho^{\gamma-1}.$$

V komentarju slike 1 je že omenjeno, da bi ta zveza bila prikazana kot šop premic s presečiščem v $\rho = 1$ ter $\tau = 1$. To samo po sebi še ne pomeni ujemanja politropnega modela z modelom konstantne entropije, za vrednosti parametra α ena ali nič. Tam je namreč v modelu konstante entropije zveza med temperaturo in gostoto ravno tako potenčna (ne vemo pa ali je potenca enaka kot v politropnem modelu). Ta zveza tudi ni edina, kateri mora biti zadoščeno za ujemanje modelov. Ujemati se morata

[2]Parametra C_ρ ni smiselno prilagajati, saj imamo v zvezdah vedno idealni plin.

tudi sami enačbi stanja (enačbi (2) in (19)). Tako lahko že upravičeno pričakujemo, da se bosta modela ujemala vsaj pri $\alpha = 1$.

Izračunajmo diferencial temperature:

$$d\tau = (\gamma - 1)\rho^{\gamma-2}d\rho.$$

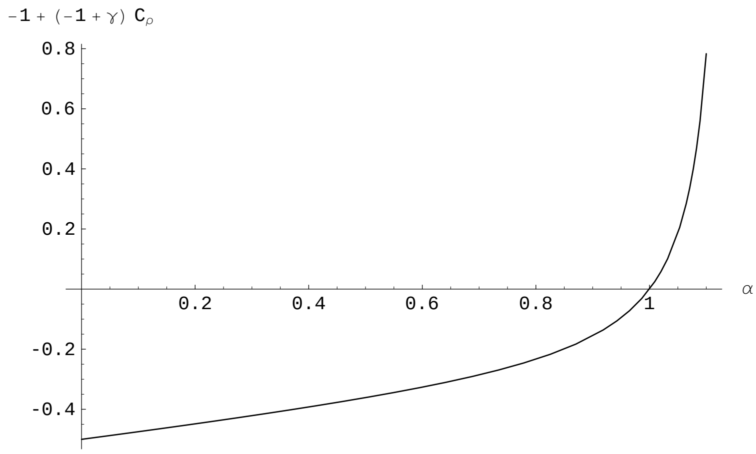
V politropnem modelu imamo idealni plin ($u = C_\rho \tau$), zato se celoten diferencial entropije glasi (vstavimo ustrezne odvode v (23)):

$$ds = [(\gamma - 1)C_\rho - 1]\frac{d\rho}{\rho}. \tag{24}$$

To enačbo sedaj integriramo in dobimo

$$\Delta s = [(\gamma - 1)C_\rho - 1]\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} = [C_\rho - n]\ln\frac{\theta_2}{\theta_1}.$$

Slika 2 prikazuje člen pred logaritmom v odvisnosti od parametra α. Očitno iz slike je, da bi morala biti razlika med modeloma najmanjša, ko je $\alpha = 1$. To ni presenetljivo, saj sta enačbi stanja in zveza med temperaturo in gostoto v tem primeru identični.



Slika 2: Prikaz faktorja $(\gamma - 1)C_\rho - 1$ v odvisnosti od α. Iz te slike pričakujemo, da se bosta modela najbolje ujemala pri vrednosti $\alpha = 1$. Še več, ko imamo samo navaden snovni plin, se morata modela popolnoma pokriti. Imamo idealni plin, tako je $C_\rho = 3/2$.

5 Program

Preden predstavimo rezultate modela, je potrebnih še nekaj besed o sami računalniški implementaciji. Hitro postane jasno, da sistema diferencialnih enačb (16) ne moremo numerično integrirati, ker ne vemo končne meje integracije. Ta meja je seveda, kot je že omenjeno, tam, kjer gostota ρ doseže vrednost 0. Še vedno pa ne vemo radija, pri katerem se to zgodi. V ta namen uporabimo strelsko metodo integracije.

Za primerno uporabo te metode, pa je potrebno sistem (16) malenkost preoblikovati. Spet uvedemo novo neznanko $x = \xi/\xi_0$ in preoblikujemo vse odvode v sistemu. Odvode po spremenljivki x označimo s $\dot{}$ in dodamo eno diferencialno enačbo

$$\begin{aligned}
\dot{\chi} &= -\rho\xi_0^3 x^2 \\
\dot{\rho} &= \frac{\alpha C_\rho \rho + 12(1-\alpha)\tau^3}{\alpha^2(1+C_\rho)\rho^2 + 20\alpha(1-\alpha)\rho\tau^3 + 16(1-\alpha)^2\tau^6}\frac{\chi\rho^2}{\xi_0 x^2 \tau} \\
\dot{\tau} &= \frac{\alpha\rho + 4(1-\alpha)\tau^3}{\alpha^2(1+C_\rho)\rho^2 + 20\alpha(1-\alpha)\rho\tau^3 + 16(1-\alpha)^2\tau^6}\frac{\chi\rho}{\xi_0 x^2} \\
\dot{\xi}_0 &= 0
\end{aligned}$$

Integracija sedaj teče po spremenljiviki x od 0 do 1. Začetni pogoji za χ, ρ in τ ter za njihove odvode ostanejo nespremenjeni, dodati pa bi bilo potrebno še enega, to je za ξ_0. Tukaj v igro vstopi strelska metoda. Ta pogoj ugibamo, na koncu integracije pa primerjamo rezultate χ, ρ ter τ s predpisanimi vrednostmi na robu zvezde. Dovolj je, da primerjamo gostoto ρ in koliko je le ta oddaljena od vrednosti 0. Tako je iskanje radija zvezde prevedeno na iskanje ničle neke komplicirane eno–parametrične funkcije, ki za parameter sprejme ξ_0 in izračuna gostoto ρ ob vrednosti $x = 1$.

Analogno uporabimo strelsko metodo tudi v primeru politropnega modela. Seveda pa je potrebno izračunan radij zvezde ξ_1 v politropnem modelu ustrezno pomnožiti s faktorjem $\sqrt{n+1}$ zaradi malenkost drugačne nove spremenljivke radija ξ.

V politorpnem modelu se zaradi numeričnega računanja in strelske metode malenkost prilagodi tudi drugo enačbo v sistemu (21):

$$u' = -\frac{2u}{\xi} - |\theta|^n.$$

Ta absolutna vrednost se doda zato, da lahko za začetni približek radija ξ_1 vzamemo tudi radij, ki je večji od pravega. V drugačnem primeru se integracija konča, takoj ko bi θ dosegla negativno vrednost, za poljuben n, kar pa je pri radiju zvezde.

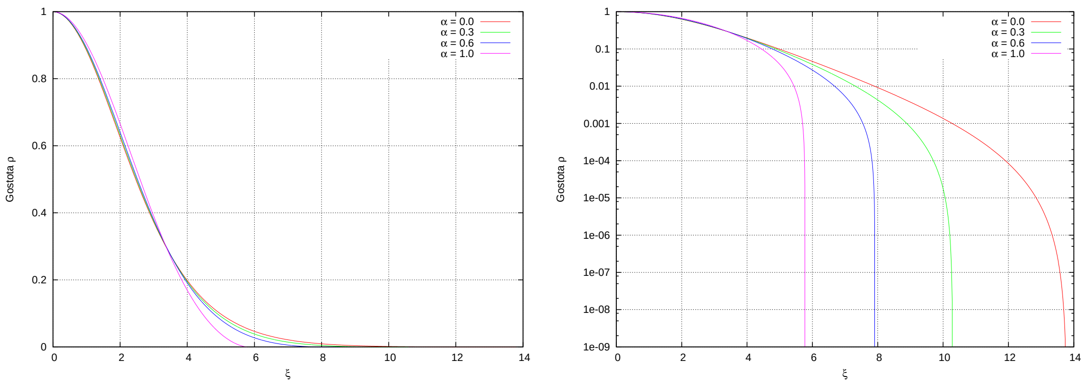
Program sam je spisan v programskem jeziku C++, s pomočjo knjižnice *Numerical Recipes in C++*[3] verzije 2.10 za Unix operacijski sistem.

6 Rezultati

V tem poglavju so predstavljeni rezultati diferencialnih enačb in strelske metode. Ujemanje modelov je res popolno pri vrednosti parametra $\alpha = 1$. To, kot je že omenjeno, ni presenetljivo, saj sta enačbi stanja v tem primeru identični. Presenetljivo pa je morda to, da neujemanje modelov ni največje pri $\alpha = 0$, kot je razvidno iz slike 5, ampak pri $\alpha \sim 0.7$.

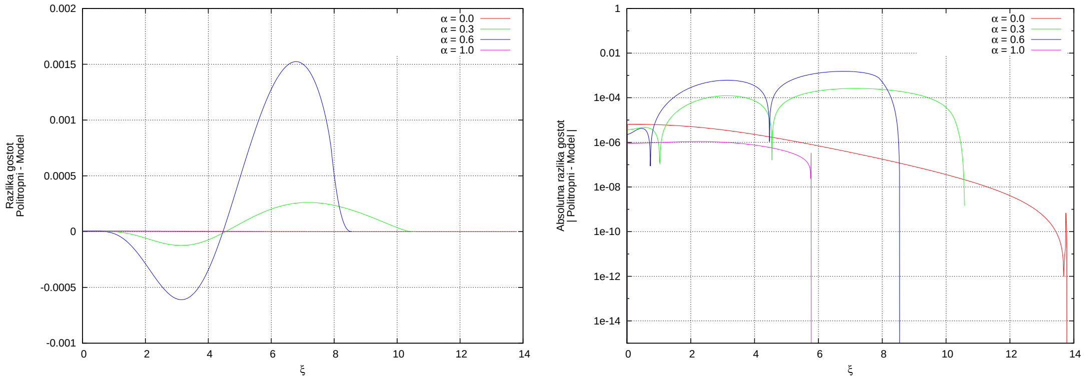
Za računanje je vzet idealni plin, zato je $C_\rho = 3/2$. Vsi radiji so brezdimenzijski z značilnim radijem

$$r_0 == \sqrt{\frac{P_c}{4\pi G \varrho_c^2}}$$



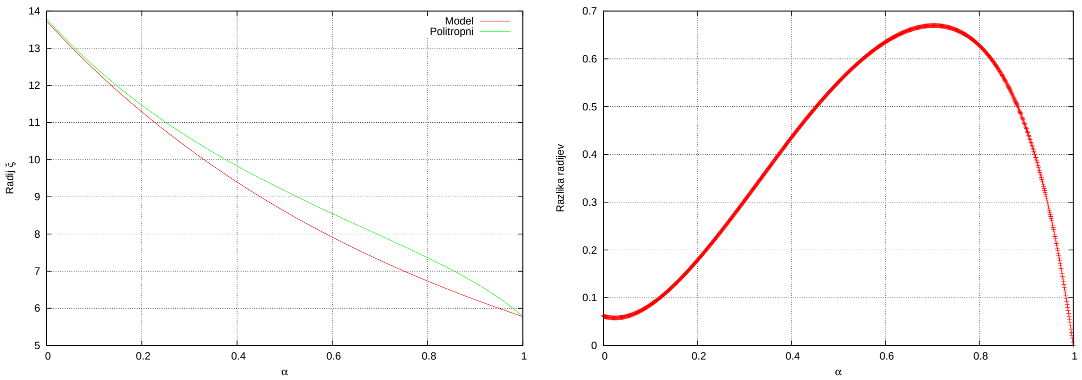
(a) (b)

Slika 3: Prikaz gostote v modelu pri različnih vrednostih parametra α v navadni in semi–logaritemski skali. Razlika je bistvena le na robu zvezde.



(a) (b)

Slika 4: Prikaz razlike gostote v obeh modelih. Modela se v primeru $\alpha = 0$ in $\alpha = 1$ ne prepleteta. Glede na končne špice, ki jih vidimo v semi–logaritemski skali, pa bi lahko sklepali, da je razlika v teh dveh primerih v okviru numerične napake. Nasploh pa je razlika med modeloma zelo majhna.



(a) (b)

Slika 5: Prikaz napovedanih radijev zvezd ter razlike med napovedma. Radija sta izračunana s pomočjo strelske metode. V oči vpade dejstvo, da je zvezda s konstantno entropijo vedno manjša ali enaka zvezdi v politropnem modelu, nikoli večja. Tukaj je razvidno, da razlika med modeloma v primeru $\alpha = 1$ ni le numeričnega pomena.

Literatura

[1] Richard L. Bowers and Terry Deeming. *Astrophysics*, volume I Stars. Jones and Bartlett Publishers, Sudbury, Massachusetts, 1984.

[2] Rudolf Kippenhahn and Alfred Weigert. *Stellar Structure and Evolution.* Astronomy and Astrophysics Library. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[3] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing.* Cambridge University Press, The Pitt Building, Trumpington Street, Cambridge CB2 1RP, second edition, 2002.